Recherches autour de la théorie de Markoff

Serge Perrine

RÉSUMÉ. Le texte concerne des généralisations de l'équation de Markoff en théorie des nombres, déduites des fractions continues. Il décrit la méthode pour une résolution complète de ces nouvelles équations, ainsi que leur interprétation en algébre et en géométrie algébrique. Cette approche algébrique est complétée par un développement analytique concernant les groupes fuchsiens. Le lien avec la théorie de Teichmüller des tores percés est complètement décrit, les classifiant au moyen d'une théorie de la réduction. Des considérations plus générales au sujet des surfaces de Riemann, les géodésiques et leur étude hamiltonienne sont citées, de même que des applications à la physique, au bruit en 1/f et à la fonction zéta. Des idées relatives à d'importantes conjectures sont présentées. On donne aussi des raisons pour lesquelles la théorie de Markoff apparaît dans différents contextes géométriques, grâce à des résultats de décomposition valables dans le groupe $GL(2,\mathbb{Z})$.

ABSTRACT. The text deals with generalizations of the Markoff equation in number theory, arising from continued fractions. It gives the method for the complete resolution of such new equations, and their interpretation in algebra and algebraic geometry. This algebraic approach is completed with an analytical development concerning fuchsian groups. The link with the Teichmüller theory for punctured toruses is completely described, giving their classification with a reduction theory. More general considerations about Riemann surfaces, geodesics and their hamiltonian study are quoted, together with applications in physics, 1/f-noise and zeta function. Ideas about important conjectures are presented. Reasons why the Markoff theory appears in different geometrical contexts are given, thanks to decomposition results in the group $GL(2,\mathbb{Z})$.

"Tout voir, tout entendre, ne perdre aucune idée"

Evariste Galois

"Saisir les propriétés des choses, d'après leur mode d'existence dans l'infiniment petit"

Discours de Félix Klein sur Bernhard Riemann et son influence

"Sans l'espérance, on ne trouvera pas l'inespéré, qui est introuvable et inaccessible"

Héraclite

1. Remerciements

Mes remerciements s'adressent à différentes personnes sans lesquelles ce texte n'aurait jamais vu le jour, et à tous ceux qui m'ont aidé pour sa mise en forme. Je pense en particulier aux personnes suivantes :

- Georges Rhin qui tout au long de ces dernières années a prêté attention aux différents documents que je lui adressais périodiquement.
- Michel Planat avec qui une coopération régulière et des discussions passionnantes autour d'observations physiques qu'il avait faites ont beaucoup soutenu ma curiosité pour la théorie de Markoff. Mon intérêt pour ce sujet venait de considérations sur le codage de l'information. Mais voir apparaître le spectre de Markoff dans les caractéristiques physiques d'un oscillateur à vérouillage de phase a considérablement relancé mes travaux. En observant le comportement d'oscillateurs construits sur mesure, pourrions-nous comprendre certaines parties de cette théorie restant encore énigmatiques, pourrions-nous inversement construire certains modèles de bruit utiles à la physique? Ces questions ont orienté mes travaux.
- Michel Mendès France et Michel Waldschmidt qui se sont à différentes reprises intéressés à mes travaux, et m'ont fourni l'occasion de les perfectionner et de les exposer. Je les remercie très chaleureusement de leurs encouragements et de leurs commentaires sans concession que j'ai toujours considérés comme une source de progrès.

Je voudrais aussi remercier Cécile et les enfants pour leur grande patience à supporter le temps considérable que j'ai passé sur ce travail.

2. Présentation générale

Le but du présent travail est d'exposer une démarche de recherche conduite autour de la théorie de Markoff, ainsi que les résultats qu'elle a fournis. Cette théorie est une branche de ce que Hermann Minkowski a appelé la "géométrie des nombres" [552][124]. Elle fournit une réponse partielle au problème suivant :

Une forme quadratique réelle étant donnée $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 \in \mathbb{R}[x,y]$, quelle est la valeur minimale du nombre |f(x,y)| lorsque x et y sont des entiers non tous deux simultanément nuls?

Pour une forme définie f(x,y), c'est-à-dire telle que $\Delta(f) = b^2 - 4ac < 0$, ce problème a été résolu par Joseph Louis Lagrange. Sa solution se déduit aussi d'un résultat plus général de Charles Hermite [339] donnant :

$$C(f) = \frac{\inf_{(x,y)\in\mathbb{Z}^2 - \{(0,0)\}} |f(x,y)|}{\sqrt{|\Delta(f)|}} \le \frac{1}{\sqrt{3}} = C(x^2 + xy + y^2).$$

Il a aussi été démontré ([124] p.33) que pour tout nombre $\rho \in]0,(1/\sqrt{3})]$, on peut trouver une forme quadratique définie $f(x,y) \in \mathbb{R}[x,y]$ telle que :

$$\rho = C(f)$$
.

Si la forme f(x,y) est indéfinie, c'est-à-dire telle que $\Delta(f)=b^2-4ac>0$, on sait depuis [443] que l'on a :

$$C(f) \le \frac{1}{\sqrt{5}} = C(x^2 - xy - y^2).$$

Pour les autres valeurs, on a [443] :

$$C(f) \le \frac{1}{\sqrt{8}} = C(x^2 - 2y^2).$$

C'est pour mieux comprendre le cas indéfini qu'Andrei A. Markoff a développé sa théorie [522]. Celle-ci identifie l'infinité des valeurs C(f) comprises entre $(1/\sqrt{5})$ et (1/3) et les trous sans constante qui les séparent. Ces valeurs sont isolées et convergent vers (1/3). Pour les valeurs inférieures à (1/3), il n'existait jusqu'à une date récente aucune approche comparable à la théorie de Markoff. Des résultats lacunaires existent sur des trous sans constante, mais la situation reste globalement méconnue aujourd'hui encore. Une synthèse de ce qui était connu en 1988 a été réalisée par Thomas W. Cusick et Mary E. Flahive [180], au moment où l'auteur soutenait sa thèse sur le même sujet. La recherche menée depuis cette période s'est appuyée sur les deux dernières contributions citées. Il s'agissait d'aller au delà des résultats connus sur le sujet. On a trouvé quelques résultats relatifs à de nouveaux trous du spectre, mais assez rapidement l'idée a germé de chercher à disposer d'une généralisation de la théorie de Markoff pour essayer d'en déduire des résultats analogues à ceux disponibles au dessus de (1/3).

Parallèlement la mise en évidence en physique, autour d'oscillateurs spéciaux, de valeurs physiques égales aux constantes C(f) données par la théorie de Markoff a été particulièrement motivante. Cet accomplissement du à Michel Planat [635] a conduit à envisager la construction d'oscillateurs particuliers permettant de "voir" la structure du spectre de Markoff en des endroits où sa structure est suffisamment chaotique pour rester à ce jour méconnue. L'exploration de ce sujet, et son lien possible avec une modélisation du bruit en (1/f) qui reste à ce jour assez énigmatique,

est devenu progressivement un projet important. Construire dans ce contexte de nouvelles théories analogues à celle de Markoff est apparu utile

On a donc mis au point des notations destinées à permettre l'appréhension de nouvelles théories plus générales que la théorie originale de Markoff. Cet objectif, entrevu a l'issue du travail de thèse de l'auteur, n'avait pas débouché à ce moment sur des exemples significatifs et complets. La démarche a consisté à comprendre comment construire de façon directe sur des suites de nombres entiers positifs un processus de création arborescente qui fournisse toujours des suites attachées à une même équation diophantienne du type de celle de Markoff. A cet égard, l'article [619] s'est avéré déterminant. Il a permis de disposer de ce mode de construction pour certaines suites assez générales, en faisant en sorte qu'elles restent attachées à l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4xyz - x.$$

On a ainsi pu disposer d'une théorie complète permettant d'obtenir des constantes d'approximations convergentes vers la valeur (1/4) ainsi que quelques trous du spectre.

Il est ensuite apparu que le mode de construction découvert laissait invariantes des équations de forme plus générale. A cette occasion le lien naturel qui existe avec les sommes de Dedekind [664] a été mis en évidence. Ceci a permis d'identifier d'autres équations permettant de construire des constantes d'approximations qui convergent vers (1/3) comme dans la théorie de Markoff classique, mais cette fois par valeurs inférieures. On a ainsi pu obtenir des informations sur une partie totalement méconnue du spectre. Un exemple complet a été détaillé [625] concernant l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz + 2x.$$

Pour cette dernière, on a fourni toutes les solutions entières dans $\mathbb N$ ou $\mathbb Z$. Il est remarquable qu'à la différence de la théorie de Markoff classique, les solutions entières positives se répartissent en deux classes, et non pas en une seule. On a montré cependant comment ces deux classes donnent naissance à un arbre unique de triplets de Cohn, pour lesquels la construction sur les suites d'entiers s'applique complètement. Les triplets de Cohn sont définis de façon générale par la condition x>y>z. Les constantes données par l'équation précédentes sont différentes de celles mises en évidence dans la même zone du spectre de Markoff par David J. Crisp et William Moran [177]. C'est ainsi que le modèle géométrique construit par Harvey Cohn à partir du demi-plan de Poincaré $\mathcal H$, prolongé par l'étude des géodésiques fermées du tore percé se coupant elles-mêmes [722], est devenu insuffisant pour décrire la complexité du spectre de Markoff au voisinage de (1/3). Le projet a donc été fait de revisiter cette interprétation géométrique. Ceci a été mené à bien et a permis de comprendre la nature des équations que l'on identifiait progressivement.

Avant cela, dans [628] on a étendu le mode de construction arborescent de suites de nombres entiers positifs pour mettre en évidence d'autres équations de forme légèrement plus générale donnant des constantes d'approximation dans le voisinage de (1/3):

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz + sx, \quad s > 0.$$

Sur de telles équations, où s>0, on a pu montrer dans [619] l'existence d'un nombre fini de classes de solutions. Le même résultat est valable aussi pour $s\leq 0$. Mais alors que dans un cas (s>0) il convient d'introduire une notion de solution fondamentale pour obtenir ce résultat, dans l'autre cas $(s\leq 0)$ c'est une notion

différente de solution minimale qui permet de conclure. Au demeurant, ces dernières équations apparaissent liées entre elles compte tenu de l'expression des minima arithmétiques des formes quadratiques binaires associées.

L'approche précédente qui donne des valeurs C(f) inférieures s'accumulant sur (1/3), c'est-à-dire à nouveau dans la partie haute et méconnue du spectre, a aussi été étendue à d'autres situations. Ainsi un nouvel exemple de théorie de Markoff généralisée a été traité avec l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz + yz - 2x$$
.

Il a permis de donner une nouvelle interprétation à d'anciens travaux de Collin J. Hightower [342]. Le point d'accumulation correspondant est égal à $1/(1+\sqrt{5})$. On a aussi compris comment la connaissance d'une partie du spectre permettait d'obtenir des informations sur une partie plus basse du spectre. Dans le dernier cas cité, c'est la valeur maximale du spectre $(1/\sqrt{5})$ qui est déterminante.

Au final on a considéré que la bonne généralisation de la théorie de Markoff était relative à des équations diophantiennes notées $M^{s_1s_2}(a, \partial K, u_\theta)$, où s_1 et s_2 signes respectifs de ε_1 et $\varepsilon_2 \in \{-1, +1\}$, $a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\partial K \in \mathbb{Z}$, $u_\theta \in \mathbb{Z}$:

$$x^2 + \varepsilon_2 y^2 + \varepsilon_1 z^2 = (a+1)xyz + (\varepsilon_2 \partial K)yz - u_\theta x, \ x, y, z \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Une telle forme d'équation recouvre celles évoquées ci-dessus. Il a donc semblé que ce type d'équation était la bonne. Et en réalité on a pu montrer comment elles apparaissaient naturellement par un calcul relatif aux fractions continues. On a montré également qu'elles correspondent à une formule de trace ainsi qu'à une propriété remarquable de la fonction η de Dedekind [632]. Pour ces équations on a pu mettre au point une méthode générale de résolution qui s'apparente à la descente infinie chère aux arithméticiens. Elle fait jouer un rôle essentiel au groupe du triangle \mathbf{T}_3 qui classe les solutions. On a aussi montré comment le recours à des triplets de Cohn permettait dans l'essentiel des cas de conclure à l'existence d'une classe contenant une infinité de solutions, ainsi qu'un nombre fini de telles classes. Ce nombre de classes a d'ailleurs un lien avec le nombre de classes des corps quadratiques, mais le travail reste à faire pour mettre cette observation en état présentable.

On a pu étudier de façon directe les surfaces ayant pour équation la forme que l'on vient de donner. Ces surfaces cubiques sont rationnelles, on en a donné une représentation rationnelle. Coupées par un plan, elles donnent des courbes elliptiques dans de nombreux cas. Toutes les courbes elliptiques à coefficients rationnels sont obtenues ainsi. Ceci permet d'avoir une idée quant à des phénomènes pouvant affecter des courbes elliptiques différentes portées par une même surface cubique. Un sujet arithmétique prometteur qui s'est ainsi dégagé concerne le lien entre les théories de Markoff généralisées et la structure des points entiers sur les courbes elliptiques [631]. Les réflexions dans ce dernier domaine ne sont pas achevées. On a également pu montrer que tout réseau complet d'un corps quadratique permet de construire une équation cubique du type précédent. Ce résultat important donne un sens algébrique aux équations que l'on étudie. Il permet facilement de comprendre ce que l'on vient d'indiquer sur le nombre de classes de solutions.

Toutes les constructions qui précèdent ont aussi un support analytique commun analogue à celui découvert par Harvey Cohn pour la théorie de Markoff classique [144]. Pour mieux comprendre cette interprétation géométrique, on a étudié de façon directe les tores percés. Ceci a introduit une distinction entre les tores

percés conformes paraboliques et hyperboliques. Le cas parabolique donne une généralisalisation très satisfaisante de la théorie de Markoff, mettant en évidence des groupes fuchsiens dont on a établi qu'ils sont libres à deux générateurs. Ce sont les groupes de Fricke qui sont ainsi tous obtenus, mais ils correspondent seulement à l'équation de la théorie de Markoff classique qui les caractérise tous. Pour le cas hyperbolique, on a pu construire un exemple original illustrant le fait découvert que les groupes fuchsiens correspondants ne sont pas libres. Comme les surfaces intervenant dans ce contexte, des tores percés, sont des quotients du demi plan de Poincaré par un groupe fuchsien agissant sur lui, la théorie de Teichmüller [706] constitue un cadre bien adapté pour appréhender le sujet. On l'a donc approfondie jusqu'à en donner une présentation qui montre clairement comment elle généralise la théorie de Markoff. La théorie de Teichmüller décrit les propriétés des différentes structures conformes définissant une surface de Riemann donnée sur un même support topologique. Elle détermine par réduction une structure cristalline pour laquelle on a donné quelques éléments d'information dans l'ouvrage [632]. On a pu comprendre pourquoi il n'y a pas à considérer de tores percés elliptiques, ainsi que la nature du lien entre nos équations de Markoff généralisées et la théorie de Teichmüller.

On a aussi vu que tous les tores percés conformes paraboliques définis sur un même tore topologique percé peuvent être distingués par deux nombres réels positifs. Ce type de résultat est connu depuis les travaux de R. Fricke [144]. Mais les méthodes issues de la théorie de Markoff conduisent à se restreindre à un premier nombre, un module compris entre 1 et 2. Le module 1 correspond au tore percé d'un groupe dit de Klein. Le module 2 correspond au tore percé du groupe de Hecke [336]. On voit ainsi apparaitre de façon naturelle les deux tores étudiés dans [144]. Tous les modules intermédiaires correspondent à d'autres tores percés conformes paraboliques isomorphes en tant qu'espaces topologiques mais non en tant que surfaces de Riemann. Le fait que ces tores ne soient pas conformément équivalents a des conséquences géométriques intéressantes pour les classement des groupes fuchsiens associés. Ce résultat a été complété en montrant que tous les tores percés paraboliques sont classés au moyen de deux paramètres réels, tous deux définis à partir de la seule équation de Markoff classique :

$$x^2 + y^2 + z^2 = xyz.$$

Le module définit le domaine fondamental et un second paramètre réel dit accessoire décrit la façon dont ses bords sont identifiés.

Les théories de Markoff des équations $M^{s_1s_2}(a,\partial K,u_\theta)$ conduisent très naturellement à définir des générateurs A et B de groupes fuchsiens à deux générateurs. Elles donnent dans le cas parabolique les groupes de Fricke bien connus [681] [528]. On l'a démontré de façon rigoureuse. Les cas qui correspondent à des matrices A et B à coefficients entiers ont été complètement décrits. Il en résulte la possibilité de caractériser les tores percés paraboliques correspondants. La théorie de la réduction valable pour les nombres algébriques de degré 2 s'étend alors aux systèmes générateurs de ces groupes de Fricke. Un résultat qui en découle [364] concerne la détermination des représentations du groupe à deux générateurs \mathbf{F}_2 dans les groupes $GL(2,\mathbb{Z})$. En approfondissant cette question, on a mis en évidence le lien avec le théorème de Dyer et Formanek [265]. Sa démonstration classique repose sur des propriétés des représentations $\rho: Aut(\mathbf{F}_2) \longrightarrow GL(m,\mathbb{Z})$. Les théories de Markoff correspondantes donnent de telles représentations issues du groupe à deux générateurs \mathbf{F}_2 dans le groupe $GL(2,\mathbb{Z})$. Caractériser ces représentations est

essentiel et on a pu comprendre comment ceci revenait à considérer dans l'essentiel des cas des structures conformes sur des tores percés. Le lien esquissé à cette occasion avec la théorie de noeuds mériterait d'être creusé plus avant [99], comme si au delà des noeuds toriques on pouvait introduire une nouvelle sous-catégorie de noeuds liés aux tores percés. A partir de ces réflexions, on a surtout obtenu une meilleure connaissance du groupe $GL(2,\mathbb{Z})$. Deux décompositions ternaires qui semblent nouvelles ont été données dans [629] pour toute matrice de $GL(2,\mathbb{Z})$. Ceci permet notamment de relier la théorie de Markoff classique à la structure du groupe du triangle \mathbf{T}_3 et de représenter ce dernier dans $GL(2,\mathbb{Z})$ à l'aide d'un groupe diédral. Il est probable que tous les groupes finis donnent des résultats analogues et permettent de construire des structures arborescentes, et on conjecture que tous peuvent être représentés dans $GL(2,\mathbb{Z})$. L'auteur pense que l'on obtient par un tel procédé toutes ses généralisations de l'équation de Markoff. Quelques résultats ont été obtenus en ce sens mais il ne sont pas encore présentables. Une conséquence importante qui pourrait en découler est la conjecture que tout groupe fini est obtenu comme groupe des classes d'un corps quadratique réel.

Mais y a-t-il un lien entre ces dernières théories de Markoff et les géodésiques des tores percés conformes associés? En y réfléchissant l'auteur a envisagé à partir de cette question un domaine d'application pour ses généralisations de la théorie de Markoff au codage des géodésiques des surfaces de Riemann [704]. Il a approfondi la dualité naturelle qui existe entre points et géodésiques sur une telle surface. Malheureusement cette étude apparemment nouvelle n'a pas suffisamment débouché pour donner lieu à publication. On a cependant donné quelques éléments au chapitre 7 de l'ouvrage [632]. La question particulière de la caractérisation des géodésiques fermées par des suites finies d'entiers qui les codent, puis construisent des propriétés algébriques diverses, est très intéressante. Elle est aussi importante pour comprendre l'approche ergodique [722] [725] [704]. Les géodésiques dépendent de la structure conforme adoptée sur le tore topologique percé qui la porte. Les transformations conformes qui changent une géodésique fermée en une autre définissent des opérations de transcodage sur les suites d'entiers associées. Il y a là une perspective d'application dans le codage de l'information, en particulier le codage en flot (stream cyphering) et les générateurs pseudo-aléatoires.

Tout changement de géodésique se traduit par une déformation de la structure algébrique de ces suites. Les réflexions sur ce sujet ont été nombreuses, mais restent assez lacunaires. On a donné au chapitre 7 de [632] des pistes pour approfondir le problème. On a en particulier rappelé comment se développe dans un tel contexte l'approche hamiltonienne de la mécanique, en mettant l'accent sur son caractère quasi fonctoriel. Quelques conséquences en résultent pour la compréhension même de ce que constituent le calcul mathématique [259] et certains objets physiques. Un point qui tourne librement sur une géodésique fermée peut représenter un système physique stable, donc observable. Les changements de solutions dans nos équations diophantiennes correspondent alors à des sauts quantiques dans l'évolution d'un tel système selon des géodésiques différentes sur un tore percé. Cette idée donne une structuration quantique au système considéré, structure que l'on peut espérer retrouver dans des systèmes réels. On a un phénomène comparable sur les courbes elliptiques d'une même surface donnée par nos équations. De là à étendre la problématique pour se poser des problèmes de mécanique statistique et de théorie ergodique, il n'y a qu'un pas que les travaux de dynamique symbolique de Caroline Series [722] [725] ont depuis longtemps franchi. Le lien est aussi évident avec le problème des "petits diviseurs", les résonances proches de fréquences dans un mouvement quasi périodique, et certains modèles de bruit en 1/f (voir [27] [854] [340] [221] [637]).

Qui dit géodésique évoque le calcul des vatiations d'Euler-Lagrange, la propagation des ondes, mais aussi le théorème KAM et les tores invariants. C'est ce dernier point qui est aussi à la base de l'intérêt de différents physiciens pour la théorie de Markoff [325]. Si un système physique évolue librement selon des trajectoires géodésiques qui peuvent être représentées sur un tore, par identification de deux mouvements périodiques fondamentaux, et si un point de ce tore ne peut jamais être atteint, une théorie de Markoff généralisée apparait naturellement.

Les trois derniers thèmes que l'on vient d'évoquer ne sont pas complètement épuisés par les recherches résumées. Par contre elles ont aussi conduit à approfondir de façon très systématique le sujet de l'interprétation de Harvey Cohn de la théorie de Markoff classique. C'est ainsi qu'il a été établi qu'on rencontre cette théorie dès qu'intervient le groupe $GL(2,\mathbb{Z})$ des matrices 2×2 de déterminant ± 1 . La raison essentielle mise en évidence est l'existence dans $GL(2,\mathbb{Z})$ d'un sous-groupe diédral \mathbf{D}_6 à 12 éléments non normal définissant intrinsèquement un quotient à droite $GL(2,\mathbb{Z})/\Re_{\mathbf{D}_6}$ qui s'identifie à l'arbre complet de la théorie de Markoff (respectivement un quotient à gauche $GL(2,\mathbb{Z})/\mathbf{D}_6$ \Re équipotent). Ce résultat assure l'ubiquité du groupe du triangle $\mathbf{T}_3 = \mathbf{C}_2 * \mathbf{C}_2 * \mathbf{C}_2$ produit libre de trois groupes cycliques à deux éléments \mathbf{C}_2 dans des situations aussi diverses que les fibrés vectoriels, les ordres des anneaux de quaternions, le topographe de Conway... [686] [354] [807] [165]. L'article [629] développe cet aspect et a été repris en tant que chapitre 6 dans l'ouvrage [632].

Tout au long des travaux menés on a conservé le souci d'une cohérence globale. Il s'agissait de sortir du cadre trop contraignant de la seule équation de Markoff classique pour construire d'autres exemples mais en cherchant simultanément à comprendre comment appréhender le "chaos" du spectre des constantes d'approximation des nombres algébriques de degré 2. On voulait également permettre de maitriser les applications à la physique. Ces deux préoccupations ont constitué les fils conducteurs de la démarche développée tout au long de ces dernières années. C'est ainsi que l'on a recherché et finalement trouvé un opérateur différentiel intrinsèquement lié à la théorie de Markoff classique, la question restant ouverte de calculer son spectre et de le comparer au spectre de Markoff. La méthode utilisée pour le construire est transposable aux équations $M^{s_1s_2}(a,\partial K,u_{\theta})$. Elle a conduit à s'intéresser aux équations hypergéométriques, aux équations de Lamé qui interviennent sur les paramètres accessoires des tores percés [421], et qui ne sont que des équations de Schrödinger particulières dont le groupe de monodromie associé peut être étudié [818].

Une présentation développée des travaux que l'on vient d'évoquer a été donnée dans l'ouvrage [632]. Celui-ci peut être résumé comme suit. On a mis au point un formalisme général et décrit ses liens avec les sommes de Dedekind. On a dégagé les équations qui généralisent l'équation de Markoff classique, et on les a interprétées avec une formule de trace et les sommes liées à la fonction η de Dedekind. Partant de ces équations, on en a étudié de façon directe les solutions. Ceci a fait apparaître des structures généralisant celle découverte par A. A. Markoff. Dans quelques exemples particuliers, on a décrit les classes de solutions pour l'action du groupe \mathbf{T}_3 .

On a détaillé l'application à l'étude du spectre de Markoff. On a fait le lien avec des sujets classiques d'arithmétique quadratique, notamment la recherche des points entiers sur les courbes elliptiques. On a étudié les groupes fuchsiens agissant sur le demi-plan de Poincaré \mathcal{H} et considéré le cas des groupes libres à deux générateurs, ainsi que les conséquences pour la structure du groupe $GL(2,\mathbb{Z})$. Ceci a montré l'importance algébrique de la théorie de Markoff classique et son lien avec la K-théorie et le théorème de Dyer Formanek relatif au groupe des automorphismes d'un groupe libre. Etudiant de façon générale les surfaces de Riemann et la théorie de Teichmüller relative aux métriques sur une même surface, on a fourni de nombreuses perspectives dans le chapitre 7 de l'ouvrage [632] en cherchant à préciser le contexte qui leur donne naissance. L'un des points qui paraît le plus important à l'auteur concerne les développements relatifs à la fonction η de Dedekind, à son lien avec le laplacien d'objets à géométrie hyperbolique, et à ses généralisations en physique nucléaire. On a aussi donné quelques pistes pour réfléchir à d'importantes conjectures.

Le texte qui suit condense l'ouvrage que l'on vient de résumer, en identifiant les résultats nouveaux obtenus. Dans chaque chapitre on précise dans le premier paragraphe la problématique envisagée dans le texte qui suit, et on résume dans le dernier paragraphe les perspectives de recherches futures à mener. Le lecteur désireux d'aller à l'essentiel peut donc, au delà de la présente introduction passer tous les détails techniques qui sont présentés dans chaque chapitre en ne lisant que les introductions et les conclusions. Dans les paragraphes détaillés, on a été à l'essentiel en n'insistant ni sur les définitions données ni sur les calculs menés. On a renvoyé pour l'essentiel à l'ouvrage [632], sachant que les définitions qu'il adopte sont les plus généralement admises. Tout ce qui est relatif aux définitions classiques et aux résultats bien connus a été extrait dans la mesure du possible. Le chapitre 5 est consacré à la généralisation de la théorie de Markoff aux surfaces de Riemann hyperboliques. On a voulu bien identifier des thèmes qui ont un sens par rapport à une problématique de codage et de quantification de l'information portée par une telle surface, et plus généralement par rapport aux limitations du calcul qui modélise la physique. Le chapitre comprend peu de résultats nouveaux hors l'équation différentielle intrinsèquement liée à la théorie de Markoff. Il fournit le point de vue élaboré par l'auteur pour comprendre la signification de grandes conjectures encore d'actualité. Il développe aussi une signification profonde de la fonction éta de Dedekind expliquant sa décomposition en produit infini, et les produits infinis qui en résultent pour d'autres fonctions classiques, telles que les fonctions thêta ou les fonctions elliptiques. On a également voulu jeter quelques bases pour faire le lien avec les solitons et les travaux d'actualité en géométrie non commutative ([158] à [164]) et en théorie du chaos quantique.

Dans le texte on utilise le même système d'indexation des propositions que dans l'ouvrage [632]. Elles sont repérées dans chaque chapitre avec deux nombres, mais citées en faisant précéder ces derniers d'un nombre indiquant le chapitre où elles se trouvent. On a aussi ajouté quelques éléments nouveaux découverts depuis la publication de l'ouvrage [632], ainsi que quelques références complémentaires qui paraissent importantes. La bibliographie est légèrement plus large que ce qui est strictement utilisé dans le texte, pour facilter des travaux ultérieurs en cours.

CHAPITRE 1

Généralisation de la théorie de Markoff

1. Introduction

Historiquement, la théorie de Markoff a été construite vers 1880 grâce aux fractions continues [522]. Puis elle a été progressivement reconsidérée en mettant en avant les formes quadratiques correspondantes [123]. Aujourd'hui, elle est usuellement présentée à l'envers en partant de la résolution de l'équation diophantienne qui concluait les deux articles fondateurs [180] :

$$x^{2} + y^{2} + z^{2} = 3xyz, \ x, y, z \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

On a cherché au début du $20^{\grave{e}me}$ siècle, et de façon infructueuse, les équations à étudier pour construire une généralisation de cette théorie [274]. Reprenant ce problème, l'auteur a considéré que le retour aux fractions continues était la méthode la plus réaliste pour atteindre un tel objectif. Il a ainsi pu construire un formalisme généralisé et les équations diophantiennes qui en résultent [632] en partant des suites d'entiers strictement positifs les plus générales

$$S = (a_0, a_1, ..., a_n).$$

2. Présentation de la théorie

2.1. Notations. La matrice de la suite S et son déterminant sont donnés par

$$M_{S} = M_{(a_{0}, a_{1}, \dots, a_{n})} = \begin{bmatrix} a_{0} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} a_{n} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & K_{1} \\ m - K_{2} & K_{1} - l \end{bmatrix},$$

$$\varepsilon_{S} = \det(M_{S}) = (-1)^{n+1}.$$

La suite miroir de S est $S^* = (a_n, a_{n-1}, ..., a_0)$, et on associe à S deux suites étendues sur la gauche et sur la droite avec $S \triangleright = (\triangleleft S^*)^*$ et :

Les matrices M_S engendrent le groupe $GL(2,\mathbb{Z})$ des matrices de déterminant ± 1 . Elles agissent sur la droite projective réelle $P^1(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ou la droite complexe $P^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ par

$$\left[\begin{array}{cc} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{array}\right](z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta},$$

avec des notations classiques pour les fractions continues :

$$M_S(\infty) = [S] = [a_0, a_1, ..., a_n] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{... + \frac{1}{a_n}}}.$$

13

Les nombres algébriques de degré 2, dits nombres de Markoff, dont le développement en fraction continue est périodique et peut être écrit avec une période (S^*, a) sont notés $\theta_a(S) = [0, \underline{S^*, a}]$. On peut en donner une expression algébrique. La théorie de Markoff généralisée s'appuie sur une décomposition de forme :

$$S^* = (a_n, a_{n-1}, ..., a_0) = (X_1, b, X_2),$$

où les suites X_1 et X_2 définissent des matrices de suites dans $GL(2,\mathbb{Z})$:

$$M_{X_1} = \begin{bmatrix} m_1 & m_1 - k_{12} \\ k_1 & k_1 - l_1 \end{bmatrix}$$
 avec $\det(M_{X_1}) = \varepsilon_1 \in \{-1, +1\},$

$$M_{X_2} = \begin{bmatrix} m_2 & m_2 - k_2 \\ k_{21} & k_{21} - l_2 \end{bmatrix}$$
 avec $\det(M_{X_2}) = \varepsilon_2 \in \{-1, +1\},$

On obtient ainsi les expressions suivantes :

$$m = (b+1)m_1m_2 + m_1k_{21} - m_2k_{12}, \ \varepsilon_S = -\varepsilon_1\varepsilon_2.$$

On définit deux paramètres auxiliaires t_1 , t_2 , et deux nombres u et ∂K importants :

$$t_1 = k_1 + k_{12} - m_1, \ t_2 = k_2 + k_{21} - m_2,$$

$$u = m_2 t_1 - m_1 t_2, \ \partial K = \varepsilon_2 (K_1 - K_2).$$

Ils permettent d'évaluer :

$$m_1k_2 - m_2k_1 = (b+1)m_1m_2 - m - u,$$

$$\varepsilon_1 m_2 = K_1 m_1 - k_1 m$$
, $\varepsilon_2 m_1 = k_2 m - K_2 m_2$.

La résolution des deux dernières équations de Bezout calcule K_1, K_2, k_1, k_2 , à partir du seul triplet (m, m_1, m_2) et de $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. On en déduit les autres paramètres. Ceci permet de reconstruire la suite S^* et sa décomposition avec X_1 et X_2 . Cette méthode a été utilisée pour construire les premiers exemples de théories de Markoff généralisées [624]. Le point découvert a été que pour $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (\pm 1, \pm 1)$ donné, et à la résolution d'équations de Bezout près, le triplet (m, m_1, m_2) contient toute l'information nécessaire pour reconstruire les suites X_1 et X_2 , ainsi que b et la suite S^* , puis la décomposition matricielle associée pour M_{S^*} . On a pu s'assurer qu'il existe une suite T éventuellement vide, telle que l'on ait $X_1 = (\lhd X_2^*, c, T)$. Ceci impose une propriété de miroir partielle à la suite S:

$$\triangleleft S^* = (X_2^*, c, T, b, X_2).$$

Comme les cas $T=\emptyset$ et $X_2=\emptyset$ sont envisageables, on a obtenu ainsi un résultat essentiel pour la construction de la généralisation de la théorie de Markoff que l'on recherche :

Proposition 2.1. Hors le cas des suites (1) et (b,1), toute suite S admet une décomposition

$$S^* = (\triangleleft X_2^*, c, T, b, X_2),$$

avec X_2 et T suites d'entiers strictement positifs, éventuellement vides, ainsi que b et c entiers strictement positifs.

2.2. Forme de Markoff. Dans le cas le plus général, on dispose d'une matrice $M_{(S^*,a)}$ correspondant à la période du nombre

$$\theta_a(S) = [0, \underline{S^*, a}] = [0, \lhd X_2^*, c, T, b, X_2, a].$$

Cette matrice définit une forme quadratique issue de la recherche des points fixes de la transformation de Möbius définie par la matrice $M_{(S^*,a)}$ [143] [722]. Cette forme quadratique binaire entière indéfinie dite forme de Markoff s'écrit :

$$mF_{\theta}(x,y) = mx^2 + (((a+1)m - K_2) - K_1)xy - ((a+1)K_1 - l)y^2$$

= $m(x - \theta_a(S)y)(x - \overline{\theta_a(S)}y).$

Un calcul direct donne [619][620]:

Proposition 2.2. On a:

$$F_{\theta}(K_1, m) = F_{\theta}(K_2 - (a+1)m, m) = \varepsilon_1 \varepsilon_2 = -\varepsilon_S,$$

$$F_{\theta}(K_1 x + ((a+1)K_1 - l)y, mx + ((a+1)m - K_2)y) = -\varepsilon_S F_{\theta}(x, y).$$

2.3. Réduction. La théorie de la réduction des formes quadratiques binaires remonte à C. F. Gauss [282]. Elle concerne les formes quadratiques indéfinies que l'on écrit avec des coefficients réels $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$

$$\lambda f(x,y) = \lambda(x^2 + \beta xy + \gamma y^2).$$

Chacune a un discriminant strictement positif $\Delta(\lambda f) = \lambda^2(\beta^2 - 4\gamma) = \lambda^2\Delta(f)$. Elle possède un minimum arithmétique

$$m(\lambda f) = \inf_{(x,y) \in \mathbf{Z}^2 - \{(0,0)\}} |\lambda f(x,y)| = |\lambda| \, m(f).$$

Ceci donne sa constante de Markoff, ne dépendant pas du coefficient λ

$$C(\lambda f) = m(\lambda f) / \sqrt{\Delta(\lambda f)} = m(f) / \sqrt{\Delta(f)} = C(f).$$

Le spectre de Markoff est défini comme étant l'ensemble de toutes les constantes de Markoff de formes quadratiques réelles indéfinies. Il possède un sous ensemble particulier Mark de constantes des formes quadratiques indéfinies à coefficients entiers. C'est le spectre quadratique. Le lien entre les deux spectres a fait l'objet de différents travaux [180][790].

L'équivalence de deux formes λf et $\lambda' f'$ est définie avec des entiers $v_{11}, v_{12}, v_{21}, v_{22}$ vérifiant :

$$\lambda' f'(v_{11}x + v_{12}y, v_{21}x + v_{22}y) = \lambda f(x, y), \quad v_{11}v_{22} - v_{12}v_{21} = \pm 1.$$

Elle donne avec des notations comparables à celles de A. A. Markoff [522] le classique lemme de réduction :

Proposition 2.3. Pour toute forme quadratique réelle indéfinie $\lambda f(x,y)$ il existe une forme réduite équivalente $\lambda_0 f_0(x,y)$, vérifiant les conditions suivantes :

$$\lambda_0 f_0(x,y) = \lambda_0 (x^2 + \beta_0 xy + \gamma_0 y^2) = \lambda_0 (x - \xi_0 y)(x - \xi_0' y),$$

$$\xi_0 = \frac{-\beta_0 + \sqrt{\beta_0^2 - 4\gamma_0}}{2} = [\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_j, ...] > 1,$$

$$-1 < \xi_0' = -(1/\eta_0) = \frac{-\beta_0 - \sqrt{\beta_0^2 - 4\gamma_0}}{2} = -[0, \alpha_{-1}, \alpha_{-2}, ..., \alpha_{-j}, ...] < 0.$$

La suite des nombres entiers strictement positifs $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est associée de façon unique (à la symétrie près $\alpha_j \to \alpha_{-j}$ et aux décalages près $\alpha_j \to \alpha_{j+t}$ où $t \in \mathbb{Z}$) à $\lambda f(x,y)$. Si l'on considère les différentes valeurs

$$\xi_{j} = [\alpha_{j}, \alpha_{j+1}, ..., \alpha_{2j}, ...] > 1,$$

$$-1 < \xi'_{j} = -(1/\eta_{j}) = -[0, \alpha_{j-1}, \alpha_{j-2}, ..., \alpha_{0}, ...] < 0,$$

$$\frac{2}{L_{j}} = \xi_{j} - \xi'_{j} = \sqrt{\beta_{j}^{2} - 4\gamma_{j}},$$

définissant pour tout $j \in \mathbb{Z}$ une forme réduite équivalente à $\lambda f(x,y)$:

$$\lambda_j f_j(x, y) = \lambda_j (x^2 + \beta_j xy + \gamma_j y^2) = \lambda_j (x - \xi_j y)(x - \xi_j' y).$$

Le nombre $\lambda_i = \lambda_i f_i(1,0)$ est représenté par la forme $\lambda f(x,y)$. Et on a :

$$C(\lambda f) = C(f_0) = C(f_j) = \inf_{j \in \mathbb{Z}} \left(\frac{L_j}{2}\right).$$

Depuis [522], il est clair que travailler sur les formes de Markoff est équivalent à utiliser la théorie classique de la réduction des formes quadratiques :

PROPOSITION 2.4. Toute forme quadratique indéfinie f(x,y) à coefficients entiers définit un nombre fini de formes de Markoff $F_{\theta}(x,y)$ équivalentes à f(x,y), de nombres de Markoff $\theta_a(S)$ correspondant compris entre 0 et 1, et de suites associées (S^*,a) . De plus on a équivalence des propriétés suivantes :

- $1/F_{\theta}(x,y)$ forme de Markoff
- $2/F_{\theta}(-x,y)$ forme réduite

2.4. Calcul des constantes et approximation diophantienne. L'étude du spectre quadratique Mark dans le spectre de Markoff est faisable de façon exhaustive en étudiant [619] les constantes des formes $F_{\theta}(x, y)$:

$$\Delta(F_{\theta}) = \left\lceil \frac{((a+1)m + K_1 - K_2)^2 - 4\varepsilon_1\varepsilon_2}{m^2} \right\rceil = \frac{\Delta_a(S)}{m^2},$$

$$0 < m(F_{\theta}) = \inf\{ |F_{\theta}(x,y)|; (x,y) \in \mathbb{Z}^2 - \{(0,0)\} \} = \frac{m-s}{m} \le F_{\theta}(1,0) = 1.$$

La théorie du polygone de Klein [430] permet d'écrire

$$0 < C(F_{\theta}) = m(F_{\theta}) \frac{m}{\sqrt{\Delta_a(S)}} = \frac{m - s}{\sqrt{\Delta_a(S)}} \le \frac{m}{\sqrt{\Delta_a(S)}}.$$

Elle fournit un lien avec l'approximation diophantienne:

PROPOSITION 2.5. Soit $\theta_a(S)$ un nombre de Markoff réel algébrique de degré 2 associé à la forme $F_{\theta}(x,y)$, l'ensemble des points d'accumulation de l'ensemble

$${ \{ | q(q\theta_a(S) - p) | ; p, q \in \mathbb{Z} \},$$

est fini et s'écrit sous la forme

$$\left\{\frac{\mid m_j\mid}{\sqrt{\Delta_{\sigma}(S)}}; m_j \in \mathbb{Z}^*\right\},$$

où m_j est un entier représenté par la forme $mF_{\theta}(x,y)$ sur une réduite (p_j/q_j) de $\theta_a(S) = [0,S^*,a]$:

$$mF_{\theta}(p_j, q_j) = m_j.$$

C'est aussi l'ensemble des points d'accumulation de l'ensemble

$$\{|q(q\overline{\theta_a(S)}-p)|; p,q\in\mathbb{Z}\}.$$

Sa plus petite valeur n'est autre que la constante de Markoff $C(F_{\theta}) = C(\theta_a(S))$. Sa plus grande valeur peut être très différente de $C(\theta_a(S))$. Et si l'on note

$$\theta_a(S) = [0, \underline{S^*, a}] = [b_0, b_1, b_2, \dots],$$

on peut aussi écrire avec les réduites de ce nombre

$$q_{j}(q_{j}\theta_{a}(S) - p_{j}) = \frac{(-1)^{j}}{(b_{j+1} + [0, b_{j+2}, b_{j+3}, \dots] + [0, b_{j}, b_{j-1}, \dots, b_{1}])},$$

$$C(F_{\theta}) = C(\theta_{a}(S)) = \frac{1}{\limsup_{j \to \infty} (b_{j+1} + [0, b_{j+2}, b_{j+3}, \dots] + [0, b_{j}, b_{j-1}, \dots, b_{1}])}.$$

2.5. Extrema positif et négatif. On est conduit à se demander si le minimum arithmétique de F_{θ} est atteint positivement ou négativement. On note ν_{θ} la plus grande valeur strictement négative représentée par F_{θ} et μ_{θ} la plus petite valeur strictement positive représentée par F_{θ} . On pose :

$$1 \ge \mu_{\theta} = \frac{m - s_{\mu}}{m} > 0, \ \nu_{\theta} = -\frac{m - s_{\nu}}{m} < 0.$$

La situation où $-\nu_{\theta} = \mu_{\theta}$, comme dans la théorie de Markoff classique, est exceptionnelle. C'est pourquoi on ne doit plus l'utiliser comme un argument déterminant dans l'étude des constantes de Markoff, ainsi que cela est fait depuis les travaux de Remak [673], notamment dans [123]. Considérant la période du nombre de Markoff associé à $(S^*, a) = (\langle X_2^*, c, T, b, X_2, a)$, on a été conduit à se demander si les nombres b et c ne déterminent pas la façon dont la forme F_{θ} atteint ses valeurs μ_{θ} ou ν_{θ} . En fait ceci dépend de ε_1 et ε_2 car on a :

$$\begin{split} \frac{1}{c + \frac{1}{[T, b, X_2, a, \lhd X_2^*, c, \ldots]} + \frac{1}{[X_2 \rhd, a, X_2^*, b, T^*, c, \ldots]}} &= \varepsilon_2 \frac{m F_\theta(k_2, m_2)}{\sqrt{\Delta_a(S)}} > 0. \\ \frac{1}{b + \frac{1}{[X_2, a, \lhd X_2^*, c, T, b, \ldots]} + \frac{1}{[T^*, c, X_2 \rhd, a, X_2^*, b, \ldots]}} &= -\varepsilon_1 \frac{m F_\theta(k_1, m_1)}{\sqrt{\Delta_a(S)}} > 0. \end{split}$$

Si l'on écrit le dernier nombre sous la forme

$$\frac{m-s_b}{\sqrt{\Delta_a(S)}}$$

on obtient le résultat essentiel suivant :

Proposition 2.6. Avec les expressions précédentes qui définissent s_b , on a :

$$s_b = (b-a)m_1m_2 - u.$$

Cette formule remarquée dans l'article [628] a une démonstration directe :

$$mF_{\theta}(k_1, m_1) = mk_1^2 + ((a+1)m - K_2 - K_1)k_1m_1 - ((a+1)K_1 - l)m_1^2$$

$$= k_1(mk_1 - m_1K_1) + (a+1)m_1(mk_1 - m_1K_1) + m_1(m_1l - K_2k_1)$$

$$= -\varepsilon_1(k_1 + (a+1)m_1)m_2 + \varepsilon_1m_1k_2$$

$$= \varepsilon_1((b+1)m_1m_2 - m - u) - \varepsilon_1(a+1)m_1m_2$$

$$= -\varepsilon_1(m - ((b-a)m_1m_2 - u)).$$

Elle donne un complément à la proposition 1.2.2 :

Proposition 2.7. La forme de Markoff vérifie avec les paramètres introduits

$$\varepsilon_1 F_{\theta}(k_1, m_1) = \varepsilon_2 F_{\theta}(k_2 - (a+1)m_2, m_2) = -((m + (a-b)m_1m_2 + u)/m) < 0.$$

On obtient maintenant en comparant les cas $\varepsilon_1 = 1$ et $\varepsilon_1 = -1$:

Proposition 2.8. Pour toute forme de Markoff F_{θ} , on a le majorant suivant pour son minimum arithmétique :

$$m(F_{\theta}) \le \frac{m+u+(a-b)m_1m_2}{m},$$

avec les inégalités suivantes :

$$(b-a)m_1m_2 < m+u < (a+b+2)m_1m_2 - (a+1)\partial Km_2^2,$$

 $\partial Km_2 < m_1.$

Vouloir étudier séparement les deux extrema positif ou négatif pourrait conduire à considérer chacune des deux parties du polygone de Klein pour elle-même. En fait les fractions continues adaptées pour ce faire sont les fractions continues régulières réduites, dites de Jung-Hirzebruch, qui s'écrivent :

$$[[a_0, a_1, ..., a_n]] = a_0 - \frac{1}{a_1 - \frac{1}{... - \frac{1}{a_n}}}.$$

Ces nouvelles réduites correspondent [261] à des sommets du polygone de Klein supérieur si et seulement si on a $a_n \neq 2$. Elles sont reliées aux fractions continues ordinaires utilisées ci-dessus ([353] (p. 215) [576] [216]) par la formule générale suivante :

$$[a_0, a_1, z] = [[a_0 + 1, 2_{a_1 - 1}, z + 1]].$$

2.6. L'équation de Markoff généralisée. Dans le cas le plus général, on peut mettre en évidence de plusieurs façons l'existence d'une équation diophantienne généralisant celle de Markoff. Comme dans [123] on peut utiliser une nouvelle forme quadratique reliée à $F_{\theta}(x,y)$:

$$\phi_{\theta}(z,y) = z^2 + ((a+1)m + K_1 - K_2)zy - \varepsilon_S y^2 = m^2 F_{\theta}(x,y), \quad z = mx - K_1 y.$$

Elle possède la propriété de multiplicativité suivante :

Proposition 2.9. On a

$$\phi_{\theta}(z_1, y_1)\phi_{\theta}(z_2, y_2) = \phi_{\theta}(z_1 z_2 + \varepsilon_S y_1 y_2, y_1 z_2 + z_1 y_2 + ((a+1)m + K_1 - K_2)y_1 y_2).$$

Elle est invariante par différentes transformations [123]:

Proposition 2.10. On a:

$$\phi_{\theta}(z,y) = \phi_{\theta}(-z,-y)$$

$$= -\varepsilon_{S}\phi_{\theta}(y,-\varepsilon_{S}z)$$

$$= \phi_{\theta}(z + ((a+1)m + K_{1} - K_{2})y,-y)$$

$$= \phi_{\theta}(-z,y - ((a+1)m + K_{1} - K_{2})\varepsilon_{S}z)$$

$$= -\varepsilon_{S}\phi_{\theta}(y - \varepsilon_{S}((a+1)m + K_{1} - K_{2})z,\varepsilon_{S}z)$$

$$= -\varepsilon_{S}\phi_{\theta}(-y,-\varepsilon_{S}z - ((a+1)m + K_{1} - K_{2})\varepsilon_{S}y).$$

Cette dernière proposition donne $\phi_{\theta}(-\varepsilon_1 m_2, m_1) = m^2 F_{\theta}(k_1, m_1)$ et l'expression vue pour s_b fait apparaître l'équation $M^{s_1 s_2}(b, \partial K, u)$ recherchée, dont les termes ne dépendent que de la suite S^* :

PROPOSITION 2.11. Soit $S^* = (a_0, a_1, ..., a_n) = (X_1, b, X_2)$ une suite d'entiers positifs donnant les paramètres $m, m_1, m_2, \partial K, u, \varepsilon_1, \varepsilon_2$, le triplet d'entiers $(m, m_1, m_2) \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^3$ est solution de l'équation diophantienne $M^{s_1s_2}(b, \partial K, u)$

$$m^2 + \varepsilon_2 m_1^2 + \varepsilon_1 m_2^2 = (b+1)m m_1 m_2 + \varepsilon_2 \partial K m_1 m_2 - u m.$$

En notant $u_{\theta} = u + (a-b)m_1m_2 = -s_b$ pour tout $a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, le triplet d'entiers (m, m_1, m_2) vérifie aussi l'équation $M^{s_1s_2}(a, \partial K, u_{\theta})$

$$m^2 + \varepsilon_2 m_1^2 + \varepsilon_1 m_2^2 = (a+1)m m_1 m_2 + \varepsilon_2 \partial K m_1 m_2 - u_\theta m.$$

- 2.7. Autres démontrations. Trois autres démonstrations de cette proposition ont été découvertes. Elles sont détaillées dans l'ouvrage [632].
 - Une première généralise le calcul original de Markoff [522].
- Une seconde met en oeuvre les sommes de Dedekind [630], dont le lien avec l'équation de Markoff a été reconnu depuis longtemps [354](pp. 158-165) au travers de leur classique formule de réciprocité [664]. La somme de Dedekind est définie pour $(\delta, \gamma) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \{0\}$ comme suit :

$$s(\delta, \gamma) = s(\delta, |\gamma|) = \sum_{k=1}^{|\gamma|} \left(\left(\frac{k\delta}{|\gamma|} \right) \right) \left(\left(\frac{k}{|\gamma|} \right) \right).$$

La première mention des sommes $s(\delta, \gamma)$ se trouve dans l'étude de la fonction η faite par R. Dedekind dans son commentaire du fragment XXVIII de B. Riemann [676] (p. 397). Cette fonction est issue des calculs d'Eisenstein pour donner des produits infinis exprimant les fonctions elliptiques [839], et analogues à ceux découverts par Euler pour les fonctions trigonométriques [250] (Tome1 ch. IX). La somme de Dedekind est présente dans l'exposant donnant ε , la racine $24i\`eme$ de l'unité de la formule de transformation de η par un élément de $PSL(2, \mathbb{Z})$:

$$\eta(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}) = \varepsilon(\gamma\tau+\delta)^{\frac{1}{2}}\eta(\tau).$$

• Une troisième démonstration interprète l'équation $M^{s_1s_2}(b,\partial K,u)$ comme une formule de trace utilisant les matrices

$$A_b = M_{(\lhd X_2^*, b)} = \begin{bmatrix} bm_2 + k_{21} & m_2 \\ bk_2 + l_2 & k_2 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_A = \det(A_b)$$

$$B_c = M_{(X_1^* \rhd, c)} = \begin{bmatrix} (c+1)m_1 - k_1 & m_1 \\ (c+1)(m_1 - k_{12}) - (k_1 - l_1) & m_1 - k_{12} \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_B = \det(B_c)$$

$$A_b B_c = M_{(\lhd X_2^*, b)} M_{(X_1^* \rhd, c)} = M_{(\lhd S \rhd, c)} = \begin{bmatrix} (c+1)m - K_1 & m \\ (c+1)K_2 - l & K_2 \end{bmatrix}.$$

Ces matrices sont dans $GL(2,\mathbb{Z})$ et non seulement dans $SL(2,\mathbb{Z})$. Notre équation se déduit d'une formule de Fricke qui donne pour $tr(A_bB_cA_b^{-1}B_c^{-1})$ la valeur :

$$\varepsilon_A tr(A_b)^2 + \varepsilon_B tr(B_c)^2 + \varepsilon_A \varepsilon_B tr(A_b B_c)^2 - \varepsilon_A \varepsilon_B tr(A_b) tr(B_c) tr(A_b B_c) - 2.$$

Il suffit de calculer par une autre méthode la trace du commutateur $A_bB_cA_b^{-1}B_c^{-1}$ dans le cas où b=c pour retrouver notre équation diophantienne comme simple formule de trace [632].

2.8. Complément. Dans le cas général il n'y a pas d'hypothèse à faire sur le nombre $\delta = \operatorname{pgcd}(m_1, m_2)$. Il s'agit d'un nombre qui peut être différent de 1 et divise u. Il vérifie :

Proposition 2.12. On a les égalités

```
\delta = pgcd(m_1, m_2) = pgcd(m_2, m) = pgcd(m, m_1) = pgcd(m, m_1, m_2).
```

La situation générale se distingue donc clairement de la théorie de Markoff classique où l'on a toujours $\delta=1$. Comme cette dernière condition est utilisée de façon assez centrale dans l'exposé [123], notamment au travers de ses lemmes 5 et 6, on comprend a posteriori pourquoi il a fallu changer de paradigme pour dégager notre généralisation de la théorie de Markoff.

3. Perspectives

Les calculs qui précèdent s'appliquent à toutes les formes quadratiques binaires indéfinies. Ceci explique pourquoi les équations diophantiennes mises en évidence sont très générales. On a indiqué qu'elles sont aussi données par une formule de trace, ainsi que par une propriété de la fonction η de Dedekind. Il s'agit là de résultats tout à fait nouveaux qui ouvrent un domaine de réflexion très important. On peut chercher à généraliser ce qui précède à des formes homogènes de plus grand degré ou possédant plus de variables. Il est possible qu'il faille privilégier dans ce contexte un algorithme [301] [567] [453] [216] généralisant les fractions continues régulières réduites $[[a_0, a_1, ..., a_n]]$ de Jung-Hirzebruch, dont on peut systématiser l'utilisation dans ce qui précède.

La fonction η de Dedekind vient des calculs d'Eisenstein pour la décomposition des fonctions elliptiques en produits infinis [839]. Une question qui se pose est de savoir s'il existe une fonction généralisant η pour d'autres fonctions trigonométriques. Un projet est de déduire de là des sommes plus générales que celles de Dedekind, et de comprendre ce que pourrait être une formule de réciprocité correspondante, ainsi qu'une équation diophantienne associée. Ce projet est accessible à partir de la théorie des groupes de Lie [41]. Chercher à partir de là des formules de trace plus générales semble être un sujet d'une grande importance.

En liaison avec des travaux de C. Procesi [658] une autre piste concerne l'étude d'une formule plus générale que celle de Fricke pour la trace du commutateur de deux matrices 2×2 .

Egalement, en liaison avec ce qui a été vu pour les extrema positif et négatif, il est intéressant d'examiner les conséquences pour les approximations asymétriques des nombres irrationnels et le résultat classique de B. Segre [11].

CHAPITRE 2

Résolution complète de nos équations

1. Introduction

Ayant identifié une bonne généralisation de l'équation de Markoff classique, on a étudié ensuite la résolution directe de l'équation diophantienne $M^{s_1s_2}(a, \partial K, u_\theta)$, où s_1 et s_2 signes respectifs de ε_1 et $\varepsilon_2 \in \{-1, +1\}$, $a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\partial K \in \mathbb{Z}$, $u_\theta \in \mathbb{Z}$:

$$x^{2} + \varepsilon_{2}y^{2} + \varepsilon_{1}z^{2} = (a+1)xyz + (\varepsilon_{2}\partial K)yz - u_{\theta}x,$$
$$x, y, z \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Il s'agissait de comprendre comment s'organisent les triplets de solutions que l'on note (m, m_1, m_2) . Une méthode de résolution a été mise au point sur des cas particuliers $M^{++}(2,0,0)$, $M^{++}(2,0,-2)$, $M^{++}(3,0,1)$. Elle est essentiellement décrite dans [625]. Désormais cette méthode est complète et permet la résolution de toutes les équations $M^{s_1s_2}(a, \partial K, u_{\theta})$.

2. Méthode de résolution et conséquences

2.1. Invariance par le groupe du triangle. La méthode de résolution classique de l'équation de Markoff présentée dans [123], en évitant les redondances entre des triplets de solutions pouvant se déduire les uns des autres, casse en réalité la structure de l'ensemble des solutions. Pour l'étendre à une équation $M^{s_1s_2}(a,\partial K,u_\theta)$ mieux vaut considérer toutes les solutions, sans restriction. Pour simplifier le problème il est aussi utile de considérer les solutions dans \mathbb{Z}^3 . Pour tout ensemble de solutions dans \mathbb{Z}^3 , on dit que son intersection avec l'ensemble $(\mathbb{N}\setminus\{0\})^3$ est son empreinte dans $(\mathbb{N}\setminus\{0\})^3$.

Il existe différentes possibilités pour déduire une solution dans \mathbb{Z}^3 d'une autre. L'équation $M^{s_1s_2}(a,\partial K,u_\theta)$ est invariante par les involutions suivantes :

$$N: (x, y, z) \longrightarrow (x, -y, -z).$$

$$X: (m, m_1, m_2) \longmapsto ((a+1)m_1m_2 - m - u_\theta, m_1, m_2) = (m', m_1, m_2),$$

$$Y: (m, m_1, m_2) \longmapsto (m, \varepsilon_2((a+1)mm_2 + \varepsilon_2 \partial Km_2) - m_1, m_2) = (m, m'_1, m_2),$$

$$Z: (m, m_1, m_2) \longmapsto (m, m_1, \varepsilon_1((a+1)mm_1 + \varepsilon_2 \partial Km_1) - m_2) = (m, m_1, m'_2),$$

On a les conditions

$$N^2=X^2=Y^2=Z^2=Id. \label{eq:XN}$$

$$XN=NX,\;YN=NY,\;ZN=NZ. \label{eq:XN}$$

Pour $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, il existe une autre involution qui laisse invariante l'équation :

$$P:(x,y,z)\longrightarrow (x,z,y).$$

Elle vérifie:

$$P^2 = Id$$
, $XP = PX$, $ZP = PY$, $YP = PZ$, $NP = PN$.

Modifiant X, remarquons que si on utilise $m_{\bullet} = (a+1)m_1m_2 - m$ au lieu de m', l'équation $M^{s_1s_2}(a, \partial K, u_{\theta})$ se transforme en une équation de même forme qui s'écrit $M^{s_1s_2}(a, \partial K - \varepsilon_2 u_{\theta}(a+1), -u_{\theta})$. Cette observation permet éventuellement de concentrer l'attention sur les équations telles que $u_{\theta} = 0$ ou $s = -u_{\theta} > 0$.

Avec les involutions X, Y et Z, s'introduit \mathbf{T}_3 , le groupe du triangle aussi noté $\mathbf{T}^*(\infty, \infty, \infty)$. C'est le produit libre de trois groupes cycliques à deux éléments \mathbf{C}_2 :

$$\mathbf{T}_3 = \mathbf{C}_2 * \mathbf{C}_2 * \mathbf{C}_2.$$

Par le théorème de la forme normale pour un tel produit libre [139] (p. 26), tout élément de \mathbf{T}_3 peut être écrit comme un mot ch = ch(X,Y,Z), produit d'involutions formelles X, Y, Z, dont deux lettres consécutives sont toujours différentes. Notre équation est invariante par l'action du groupe $\mathbf{C}_2 \times \mathbf{T}_3$ construite avec N, X, Y, Z. Et comme sa partie la moins évidente vient de l'action induite de \mathbf{T}_3 , c'est sur cette dernière que l'on met l'accent.

2.2. Différentes structures d'arbres sur le groupe du triangle. Dans le cas particulier d'une action transitive et libre du groupe \mathbf{T}_3 sur un ensemble Ω , on dit avec John H. Conway [165] que le \mathbf{T}_3 -espace Ω est un topographe. Le groupe \mathbf{T}_3 lui même peut être structuré en topographe. Il possède donc une structure de graphe en forme d'arbre, c'est-à-dire avec les définitions de [728] de graphe sans aucun circuit de forme Cir_n , où $n \geq 1$. Ses sommets sont les éléments de \mathbf{T}_3 , la racine de l'arbre étant l'unité du groupe, et ses arêtes sont étiquetées avec X, Y, Z. Les chemins (ou géodésiques) de l'arbre sont aussi décrits à partir de la racine par des mots $ch \in \mathbf{T}_3$, de sorte que les éléments de \mathbf{T}_3 se représentent de deux façons, soit par les sommets du topographe soit par ses chemins ayant pour origine sa racine. De chaque sommet sont issues trois arêtes qui correspondent à chaque lettre X, Y, ou Z.

Avec [624] on a pu définir sur \mathbf{T}_3 une nouvelle structure d'arbre sur l'ensemble des mots réduits de \mathbf{T}_3 qui commencent par XY (suivi donc d'un mot commençant par X ou Z, éventuellement vide). On dit qu'il s'agit des mots de Cohn. Ils sont classables par longueur croissante avec les transformations G et D suivantes de \mathbf{T}_3 dans \mathbf{T}_3 :

- A gauche, on écrit le mot de départ sous la forme XW, et on fabrique W' à partir de W en permutant Y et Z. On définit ensuite le transformé à gauche de XW comme étant le mot XYW'. Il est clair que pour XW de longueur n et commençant par XY, son transformé est de longueur n+1 et commence par XYZ. La transformation $G: XW \to XYW'$ est injective.
- A droite, on écrit le mot de départ sous la forme VW, où V ne contient que des lettres X et Y (au moins 2), et W commence par Z ou est éventuellement vide. On fabrique alors V' en permutant X et Y dans V. On définit ensuite XV'W comme étant le transformé à droite de VW. Il est évident que le terme XV'W commence par XYX et est de longueur n+1 lorsque VW commence par XY et est de longueur n. La transformation $D:VW\to XV'W$ est injective.

On a obtenu ainsi une propriété qui a pu être utilisée pour montrer que dans la plupart des cas l'équation $M^{s_1s_2}(a,\partial K,u_\theta)$ possède une infinité de solutions :

PROPOSITION 2.1. Dans le groupe \mathbf{T}_3 engendré par X, Y et Z, pour toute longueur $n \geq 2$ il existe 2^{n-2} mots de Cohn de longueur n. Ils sont naturellement organisés en arbre par les transformations G et D définies de \mathbf{T}_3 dans \mathbf{T}_3 .

Egalement, on peut considérer dans \mathbf{T}_3 l'ensemble des mots réduits qui commencent par X (suivi donc d'un mot commençant par Y ou Z, éventuellement vide). On dit qu'il s'agit des mots de Cassels. En changeant Y en Z dans la proposition précédente, on a facilement :

Proposition 2.2. Dans le groupe \mathbf{T}_3 engendré par X, Y et Z, pour toute longueur $n \geq 1$ il existe 2^{n-1} mots de Cassels de longueur n. Ils sont naturellement organisés en arbre.

2.3. Le groupe du triangle dans $GL(2,\mathbb{Z})$. Dans [629], et en tirant les conséquences de la théorie de Markoff classique, on a montré comment le groupe \mathbf{T}_3 est étroitement lié au groupe $GL(2,\mathbb{Z})$. On considère pour cela, avec le morphisme d'abélianisation π' du groupe $Aut(\mathbf{F}_2)$ à valeurs dans $GL(2,\mathbb{Z})$, deux matrices engendrant dans $GL(2,\mathbb{Z})$ un groupe diédral \mathbf{D}_6 à 12 éléments :

$$\pi'(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \ \pi'(o) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

On complète en considérant trois matrices d'ordre 2 :

$$\pi'(X_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, \ \pi'(Y_0) = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \pi'(Z_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Elles permettent de faire agir le groupe \mathbf{T}_3 dans $GL(2,\mathbb{Z})$ en définissant le produit suivant où $ch \in \mathbf{T}_3$ et $\pi'_0(\mathbf{T}_3)$ de façon évidente

$$ch(\pi'(X_0), \pi'(Y_0), \pi'(Z_0)) = \pi'_0(ch(X, Y, Z)) \in \pi'_0(\mathbf{T}_3).$$

On en a déduit la décomposition ternaire représentant le groupe T_3 dans $GL(2,\mathbb{Z})$:

Proposition 2.3. Tout élément $V \in GL(2,\mathbb{Z})$ se décompose d'une et d'une seule façon sous la forme

$$\pi'(o)^h \pi'(t)^k ch(\pi'(X_0), \pi'(Y_0), \pi'(Z_0)),$$

 $où h = 0, 1; k = 0, 1, ..., 5; ch \in \mathbf{T}_3.$

Les éléments de $\pi'_0(\mathbf{T}_3)$, sont caractérisés par les conditions h=0 et k=0. Le groupe $\pi'_0(\mathbf{T}_3)$ n'est pas normal dans le groupe $GL(2,\mathbb{Z})$. Il est isomorphe par π'_0 au groupe \mathbf{T}_3 . Les éléments du groupe \mathbf{D}_6 non normal dans $GL(2,\mathbb{Z})$ sont caractérisés par la condition

$$ch(\pi'(X_0), \pi'(Y_0), \pi'(Z_0)) = \mathbf{1}_2.$$

Le groupe \mathbf{D}_6 introduit deux relations d'équivalence entre éléments de $GL(2,\mathbb{Z})$

$$V_1 \Re_{\mathbf{D}_6} V_2 \ \Leftrightarrow \ V_1 V_2^{-1} \in \mathbf{D}_6 \ \Leftrightarrow \ V_2 \in \mathbf{D}_6 V_1,$$

$$V_{1 \mathbf{D}_6} \Re V_2 \Leftrightarrow V_1^{-1} V_2 \in \mathbf{D}_6 \Leftrightarrow V_2 \in V_1 \mathbf{D}_6.$$

Le quotient à droite $GL(2,\mathbb{Z})/\Re_{\mathbf{D}_6} = (GL(2,\mathbb{Z})/\mathbf{D}_6)_d$ des classes \mathbf{D}_6V_1 et le quotient à gauche $GL(2,\mathbb{Z})/\mathbf{D}_6\Re = (GL(2,\mathbb{Z})/\mathbf{D}_6)_g$ des classes $V_1\mathbf{D}_6$ où $V_1 \in GL(2,\mathbb{Z})$ sont équipotents. Ces deux ensembles sont différents car \mathbf{D}_6 n'est pas normal dans le groupe $GL(2,\mathbb{Z})$. L'écriture de $V \in GL(2,\mathbb{Z})$ dans le dernier résultat énoncé donne

$$Vch(\pi'(X_0), \pi'(Y_0), \pi'(Z_0))^{-1} = \pi'(o)^h \pi'(t)^k \in \mathbf{D}_6.$$

Elle détermine un unique élément $ch(\pi'(X_0), \pi'(Y_0), \pi'(Z_0)) \in \pi'_0(\mathbf{T}_3)$ tel que

$$V \Re_{\mathbf{D}_6} ch(\pi'(X_0), \pi'(Y_0), \pi'(Z_0)).$$

D'où une autre interprétation du topographe qui est identifiable à l'arbre complet de la théorie de Markoff ou encore au groupe du triangle T_3 :

PROPOSITION 2.4. Le groupe \mathbf{T}_3 est équipotent au quotient (à droite ou à gauche) du groupe $GL(2,\mathbb{Z})$ par son sous-groupe non normal \mathbf{D}_6 . C'est en particulier un $GL(2,\mathbb{Z})$ -espace homogène.

On a pu en déduire une proposition préalable à des résultats connus de la K-théorie ([685] (p. 193), [679] (p. 218 et p. 75), [763] (p. 261), [772]).

Proposition 2.5. On a pour $GL(2,\mathbb{Z})$ les groupes d'homologie suivants

$$H_1(GL(2,\mathbb{Z}),\mathbb{Z}) = GL(2,\mathbb{Z})/[GL(2,\mathbb{Z}),GL(2,\mathbb{Z})] \simeq \mathbf{D}_6/[\mathbf{D}_6,\mathbf{D}_6] \simeq \mathbf{C}_2 \times \mathbf{C}_2,$$

 $H_2(GL(2,\mathbb{Z}),\mathbb{Z}) \simeq \mathbf{C}_2.$

En utilisant le groupe libre à deux éléments $\mathbf{F}_2 \simeq [SL(2,\mathbb{Z}), SL(2,\mathbb{Z})]$, dont on a montré dans [629] qu'il est relié à l'équation de Markoff classique, on a obtenu :

Proposition 2.6. Tout élément $V \in GL(2,\mathbb{Z})$ se décompose d'une et d'une seule façon sous la forme

$$\pm W(A_0, B_0)O^h W_k(S, T),$$

$$h \in \{0, 1\},$$

$$W(A_0, B_0) \in \mathbf{F}_2 = [SL(2, \mathbb{Z}), SL(2, \mathbb{Z})],$$

$$W_k(S, T) \in \{\mathbf{1}_2, S, ST, STS, STST, STSTS\} \ avec \ k = 0, 1, ..., 5.$$

Les éléments du sous-groupe $SL(2,\mathbb{Z})$ normal dans $GL(2,\mathbb{Z})$ sont caractérisés par la condition h=0.

Les matrices citées dans cette proposition sont les trois générateurs de $GL(2,\mathbb{Z})$:

$$S = \left[\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{array} \right], \ T = \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{array} \right], \ O = \left[\begin{array}{cc} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right],$$

ainsi que des mots $W(A_0, B_0)$ écrits multiplicativement en fonction des deux commutateurs qui engendrent \mathbf{F}_2 d'après [511] (p. 97-98) :

$$A_0 = [(TS)^{-1}, S^{-1}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \ B_0 = [(TS)^{-2}, S^{-1}]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

On a explicité tous les passages entre les deux représentations ternaires des matrices du groupe $GL(2,\mathbb{Z})$, groupe dont on a pu également retrouver une présentation à deux générateurs T et I=OS qui est minimale [69] :

$$GL(2,\mathbb{Z}) = \langle I, T^{-1} | I^2 = ([T^{-1}, I]T^{-1})^4 = ([T^{-1}, I]T^{-1}I)^2 = \mathbf{1}_2 \rangle.$$

Le sous-groupe $\pi'_0(\mathbf{T}_3)$ est engendré par trois matrices calculables en I et T^{-1} :

$$\pi'(X_0) = T^{-1}IOT^{-1}IOIT^{-1}B_0^{-1}, \ \pi'(Y_0) = IOIOA_0^{-1}TS, \ \pi'(Z_0) = IS.$$

De plus [69] le groupe du triangle T_3 est isomorphe à $PGL(2,\mathbb{Z})$ avec :

$$PGL(2,\mathbb{Z}) = <\overline{I},\overline{T}^{-1} \mid \overline{I}^2 = ([\overline{T}^{-1},\overline{I}]\overline{T}^{-1})^2 = ([\overline{T}^{-1},\overline{I}]\overline{T}^{-1}\overline{I})^2 = \mathbf{1}>.$$

On peut vérifier que $\mathbf{F}_2\simeq [PSL(2,\mathbb{Z}),PSL(2,\mathbb{Z})]$ est d'indice 2 dans ce groupe, et que l'on a aussi :

$$[PGL(2,\mathbb{Z}),PGL(2,\mathbb{Z})] = <[\overline{I},\overline{T}^{-1}],[\overline{I},\overline{T}] \mid [\overline{I},\overline{T}^{-1}]^3 = [\overline{I},\overline{T}]^3 = 1 > \simeq \mathbf{C}_3 \star \mathbf{C}_3.$$

- **2.4. Forêt et bouquets de solutions.** Résoudre l'équation $M^{s_1s_2}(a,\partial K,u_\theta)$ dans \mathbb{Z}^3 consiste à déterminer la structure du \mathbf{T}_3 -espace de ses triplets de solutions. C'est une union de \mathbf{T}_3 -espaces connexes (des \mathbf{T}_3 -orbites). On dit alors que chaque \mathbf{T}_3 -espace connexe de solutions dans \mathbb{Z}^3 est un bouquet. On le note $Bq \subset \mathbb{Z}^3$. L'union des bouquets possibles $Bq_1, Bq_2, ..., Bq_n, ...$, est la forêt des solutions dans \mathbb{Z}^3 de l'équation $M^{s_1s_2}(a,\partial K,u_\theta)$. Bouquets et forêt étant des \mathbf{T}_3 -espaces, ils peuvent être structurés comme un graphe dont les sommets sont les triplets de solutions et dont les arêtes sont non orientées. De chaque sommet partent trois arêtes. Chaque arête est étiquetée par l'involution X, Y ou Z permettant de passer d'une extremité de l'arête à l'autre. Les définitions de $[\mathbf{728}]$ s'appliquent encore, permettant de considérer aussi des arbres de solutions, ce sont des graphes sans aucun circuit de forme Cir_n , où $n \geq 1$. L'étude d'exemples montre que tous les bouquets de solutions que l'on rencontre ne sont pas des arbres.
- **2.5.** Hauteur et réduction des triplets de solutions. Pour tout triplet $(m, m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^3$ de solutions de l'équation $M^{s_1 s_2}(a, \partial K, u_\theta)$, on définit sa hauteur

$$h = \max(|m|, |m_1|, |m_2|) \ge 0.$$

On peut considérer trois autres valeurs construites avec les involutions X, Y, Z:

$$h_X = \max(|m'|, |m_1|, |m_2|),$$

$$h_Y = \max(|m|, |m'_1|, |m_2|),$$

$$h_Z = \max(|m|, |m_1|, |m'_2|).$$

On dit qu'un triplet (m, m_1, m_2) n'est pas fondamental si et seulement si l'un des nombres h_X , h_Y , h_Z est strictement plus petit que h. Dans le cas contraire, un triplet (m, m_1, m_2) qui ne vérifie pas cette dernière condition est appelé fondamental. Les inégalités qui caractérisent cette situation permettent d'identifier les triplets fondamentaux, chacun d'entre eux définissant un bouquet de solutions par l'action du groupe \mathbf{T}_3 .

Considérons un triplet quelconque d'un bouquet de solutions de l'équation $M^{s_1s_2}(a,\partial K,u_{\theta})$. Si $h_X < h$ on applique X et on change de triplet, si $h_Y < h$ on applique Y et on change de triplet, si $h_Z < h$ on applique Z et on change de triplet. Ceci donne un algorithme dont l'avancement dans le bouquet que l'on considère est contrôlé par la réduction de la hauteur qui décroit en restant positive. Losque la hauteur est minimale, on identifie un triplet fondamental dans le bouquet considéré pour l'équation $M^{s_1s_2}(a,\partial K,u_{\theta})$. On dispose ainsi d'une méthode analogue à la descente infinie de Fermat pour calculer toutes les solutions dans \mathbb{Z}^3 de cette équation, et les classer en bouquets.

Si l'on travaille dans $(\mathbb{N}\setminus\{0\})^3$ la hauteur est définie sans valeur absolue. Il se peut que pour un triplet donné l'algorithme précédent ne permette plus par application de X, Y ou Z, de trouver un nouveau triplet dans l'ensemble $(\mathbb{N}\setminus\{0\})^3$. Un tel triplet sur lequel l'algorithme s'arrête est dit minimal.

2.6. Solutions fondamentales dans $(\mathbb{N}\setminus\{0\})^3$. On a un résultat de finitude général [632] pour les solutions fondamentales d'une équation $M^{s_1s_2}(a, \partial K, u_\theta)$:

Proposition 2.7. Considérons les solutions dans $(\mathbb{N}\setminus\{0\})^3$ d'une équation diophantienne $M^{s_1s_2}(a,\partial K,u_\theta)$. Elles ne sont fondamentales que dans un nombre fini de cas, hors le cas des équations $M^{--}(a,-2-u_\theta(a+1),u)$ où $u_\theta<0$:

$$x^{2} - y^{2} - z^{2} = (a+1)xyz + (u_{\theta}(a+1) - 2)yz - u_{\theta}x.$$

Ces dernières ont une infinité de solutions fondamentales valant $(-u_{\theta}, m_1, m_1)$, avec $m_1 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ quelconque, et les bouquets correspondants, en nombre infini, sont finis et s'écrivent

$$\{(-u_{\theta}, m_1, m_1), ((a+1)m_1^2, m_1, m_1)\}.$$

En dehors de ces cas particuliers, on ne trouve ainsi qu'un nombre fini de bouquets pour l'action du groupe T_3 ayant une empreinte non vide dans $(\mathbb{N}\setminus\{0\})^3$.

Ce résultat a donné une proposition garantissant qu'on ne trouve dans l'essentiel des cas qu'un nombre fini de solutions fondamentales.

PROPOSITION 2.8. Considérons les solutions dans $(\mathbb{N}\setminus\{0\})^3$ d'une équation diophantienne $M^{s_1s_2}(a,\partial K,u_\theta)$. Si elle possède une empreinte de bouquet contenant une infinité de solutions distinctes, alors elle n'a qu'un nombre fini de bouquets pour l'action du groupe \mathbf{T}_3 ayant une empreinte non vide dans $(\mathbb{N}\setminus\{0\})^3$.

2.7. Solutions minimales dans $(\mathbb{N}\setminus\{0\})^3$. Certaines empreintes de bouquet ne sont identifiables que grâce à des solutions minimales. Pour ces dernières, on a la caractérisation suivante [632] :

PROPOSITION 2.9. Soit une solution $(m, m_1, m_2) \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^3$ d'une équation diophantienne $M^{s_1s_2}(a, \partial K, u_\theta)$ vérifiant à une inversion près des indices la condition $m_1 \geq m_2 \geq 1$. Elle est minimale si et seulement si on a l'une des conditions suivantes :

$$\varepsilon_2 m_1^2 + \varepsilon_1 m_2^2 - \varepsilon_2 \partial K m_1 m_2 \le 0, \quad \varepsilon_2 m^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 m_2^2 + \varepsilon_2 u_\theta m \le 0.$$

Il se peut qu'une équation $M^{s_1s_2}(a,\partial K,u_\theta)$ ait un nombre fini de solutions minimales, et aucune solution fondamentale. C'est le cas de l'équation $M^{++}(2,0,-2)$. Pour $\varepsilon_1=\varepsilon_2=1$, les deux conditions $\partial K\leq 2$ et $u_\theta\leq 0$ ne donnent qu'un nombre fini de solutions minimales et de solutions fondamentales. Dans ce cas, on a établi l'existence d'un nombre fini d'empreintes de bouquets de solutions dans $(\mathbb{N}\setminus\{0\})^3$ pour l'équation $M^{++}(a,\partial K,u_\theta)$. Pour les autres cas, la situation est assez diverse en fonction des paramètres $a,\partial K,u_\theta$, mais dans l'essentiel des cas le nombre d'empreintes de bouquet reste fini.

2.8. Les triplets de Cohn et leur utilisation. On dit qu'une solution $(m, m_1, m_2) \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^3$ d'une équation $M^{s_1 s_2}(a, \partial K, u_\theta)$ est un triplet de Cohn [144] si et seulement si on a $m > m_1 > m_2$. Toutes les solutions possibles dans $(\mathbb{N} \setminus \{0\})^3$ ne sont pas de ce type, comme le montre le cas où $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ et une permutation de y et z dans l'équation étudiée. Mais de telles solutions apparaissent naturellement à l'issue des calculs du chapitre précédent. En effet toute paire de suites X_2 et T détermine des fractions continues de plus en plus longues expliquant a posteriori les inégalités définissant les triplets de Cohn :

$$m_2/k_2 = [\triangleleft X_2^*], \ m_1/k_1 = [\triangleleft X_2^*, c, T], \ m/K_1 = [\triangleleft X_2^*, c, T, b, X_2].$$

On a pu vérifier que les triplets de Cohn d'une même empreinte de bouquet sont donnés par des chemins de \mathbf{T}_3 commençant par XY. A partir de telles suites, on a mis au point un procédé de construction d'un arbre de triplets de Cohn pour nos équations [624]. On a utilisé pour cela les combinaisons G, DD, GD, des transformations G et D mises en évidence dans le groupe \mathbf{T}_3 , ceci donne des triplets de Cohn lorsque les suites associées sont bien définies, c'est-à-dire à coefficients entiers positifs (comme vu dans [628] les opérateurs \triangleleft et \triangleright peuvent créer

des problèmes correspondant au fait que le bouquet concerné n'est pas un arbre). Pour cela on change d'abord l'équation $M^{s_1s_2}(a,\partial K,u_\theta)$ en une équation équilibrée $M^{s_1s_2}(c,\partial K_c,u)$ assurant la condition b=c et ne modifiant pas les suites X_2 et T.

- **2.9.** La construction algorithmique à droite et à gauche. Les formules pour des transformations G, DD, GD, donnant un triplet de Cohn à partir d'un autre sont les suivantes pour l'équation $M^{s_1s_2}(c,\partial K_c,u)$:
 - La construction à gauche est définie sur les suites par :

$$X_2^G = (\lhd T^*, c, X_2), \ T^G = T.$$

On en déduit

$$X_1^G = (\triangleleft X_2^*, c, T \triangleright, c, T),$$

$$(S^G \triangleright) = (X_2^*, c, T \triangleright, c, T^*, c, \triangleleft T^*, c, X_2).$$

L'équation diophantienne correspondant aux nouvelles suites et dont le triplet de Cohn (m^G, m_1^G, m_2^G) est une solution, s'écrit :

$$M^{s_2,s_1}(c,\partial K_c,\varepsilon_1\varepsilon_2u): x^2+\varepsilon_1y^2+\varepsilon_2z^2=(c+1)xyz+\varepsilon_1\partial K_cyz-\varepsilon_1\varepsilon_2ux.$$

• La construction à droite est plus complexe. Ceci a été découvert dans [620]. On doit en réalité distinguer deux cas. En partant deux fois à droite, on définit

$$X_2^{DD} = X_2^*, \ T^{DD} = (\triangleleft X_2^*, c, T, c, X_2 \triangleright).$$

Ceci donne:

$$X_1^{DD} = (\triangleleft X_2, c, \triangleleft X_2^*, c, T, c, X_2 \triangleright),$$

$$(S^{DD}\rhd)=(X_2,c,\lhd X_2^*,c,T^*,c,X_2\rhd,c,X_2^*).$$

L'équation diophantienne correspondant aux nouvelles suites et dont le triplet de Cohn $(m^{DD}, m_1^{DD}, m_2^{DD})$ est solution, s'écrit :

$$M^{s_1,s_2}(c,\partial K_c,u): x^2 + \varepsilon_2 y^2 + \varepsilon_1 z^2 = (c+1)xyz + \partial K_c yz - \varepsilon_2 ux.$$

• La construction à gauche une fois après un passage à droite est définie avec :

$$X_2^{DG} = (\lhd X_2^*, c, T), \ T^{DG} = (X_2^*, c, T^*, c, X_2).$$

Ceci donne pour les autres suites que l'on considère

$$X_1^{DG} = (\lhd T^*, c, X_2 \rhd, c, X_2^*, c, T^*, c, X_2),$$

$$(S^{DG}\rhd)=(T^*,c,X_2\rhd,c,X_2^*,c,T,c,X_2,c,\lhd X_2^*,c,T).$$

On trouve encore une équation diophantienne correspondant aux nouvelles suites, dont le triplet de Cohn $(m^{DG}, m_1^{DG}, m_2^{DG})$ est une solution :

$$M^{s_2,s_1}(c,\varepsilon_2\partial K_c,\varepsilon_1u):x^2+\varepsilon_1y^2+\varepsilon_2z^2=(c+1)xyz+\varepsilon_1\varepsilon_2\partial K_cyz-\varepsilon_1ux.$$

2.10. Conséquence pour la résolution de nos équations. Les transformations G, DD, GD, ont donné le résultat suivant pour l'équation $M^{s_1s_2}(c, \partial K_c, u)$:

PROPOSITION 2.10. Considérons un triplet de Cohn (m, m_1, m_2) associé à deux suites X_2 et T, solution de l'équation diophantienne équilibrée

$$M^{s_1 s_2}(c, \partial K_c, u) : x^2 + \varepsilon_2 y^2 + \varepsilon_1 z^2 = (c+1)xyz + \varepsilon_2 \partial K_c yz - ux.$$

On obtient pour les équations diophantiennes transformées à droite et à gauche de la précédente les expressions

$$G: M^{s_1s_2}(c, \partial K_c, u) \longmapsto M^{s_2s_1}(c, \partial K_c, \varepsilon_1\varepsilon_2 u),$$

$$DD: M^{s_1s_2}(c, \partial K_c, u) \longmapsto M^{s_1s_2}(c, \varepsilon_2 \partial K_c, \varepsilon_2 u),$$

$$GD: M^{s_1s_2}(c, \partial K_c, u) \longmapsto M^{s_2s_1}(c, \varepsilon_2 \partial K_c, \varepsilon_1 u).$$

De plus le processus de construction donné sur les suites fournit, lorsque les suites sont bien définies, un triplet de Cohn solution de l'équation correspondante, de taille strictement plus grande que celle du triplet (m, m_1, m_2) . Il existe alors une infinité de solutions pour l'équation $M^{s_1s_2}(c, \partial K_c, u)$ et un nombre fini d'empreintes de bouquets correspondantes.

La transposition à des valeurs a ou b différentes de c ne pose pas de problème, donnant un résultat analogue pour $M^{s_1s_2}(a, \partial K, u_\theta)$ ou $M^{s_1s_2}(b, \partial K, u)$.

- **2.11.** Construction des suites de départ X_2 et T. Les nombres ε_1 , ε_2 , a, ∂K , u_{θ} sont donnés par l'équation $M^{s_1s_2}(a,\partial K,u_{\theta})$ que l'on considère. Disposant par la méthode de résolution de cette équation d'un triplet $(m,m_1,m_2) \in (\mathbb{N}\setminus\{0\})^3$ de solutions, on peut construire deux suites associées X_1 et X_2 en résolvant les équations de Bezout en (K_1,k_1) et (K_2,k_2) . On se ramène alors à une équation $M^{s_1s_2}(b,\partial K,u)$.
- 2.11.1. Cas particulier où $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$. Dans tous les exemples étudiés où $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, on a trouvé un cas où $T = \emptyset$. On a pu démontrer que cette remarque est générale.

Proposition 2.11. Considérons une équation $M^{s_1s_2}(b,\partial K,u)$ où $\varepsilon_1=\varepsilon_2$

$$x^{2} + \varepsilon_{2}y^{2} + \varepsilon_{2}z^{2} = (b+1)xyz + \varepsilon_{2}\partial Kyz - ux,$$

telle que l'on puisse trouver m_1 et m_2 dans $\mathbb{N}\setminus\{0\}$ vérifiant

$$m_1^2 - (b + \partial K + 1)m_1m_2 + m_2^2 = -u - \varepsilon_2.$$

Alors elle possède un triplet de solutions (m, m_1, m_2) tel que

$$m = m_1^2 - \partial K m_1 m_2 + m_2^2.$$

En notant $c = b + \partial K$ et dans le cas où l'on a $m_1 - cm_2 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, condition assurée si u < 0, on peut construire une infinité de solutions de l'équation équilibrée associée grâce aux transformations G, DD, GD, avec $T = \emptyset$ et X_2 suite définie avec $k_{21} = m_1 - cm_2 > 0$ par

$$\frac{m_2}{m_1 - cm_2} = [X_2], \det(M_{X_2}) = \varepsilon_2.$$

Dans tous ces cas on a la solution $(\varepsilon_2, m_1, m_2)$ pour l'équation $M^{s_1 s_2}(b, \partial K, u)$:

$$m_1^2 - (b+1+\partial K)m_1m_2 + m_2^2 = -u - \varepsilon_2.$$

La valeur de $\varepsilon_1\varepsilon_2$ est une forte contrainte, elle impose $\varepsilon_S=-1$. En réalité, si l'on étudie des nombres $\theta_a(S)$ on peut toujours changer la suite S en S'=(S,a,S),

et se ramener avec cette dernière suite à $\varepsilon_{S'} = -1$. Moyennant cette transformation d'allongement de la suite S, on peut par exemple dans l'étude des constantes de Markoff faire en sorte que la contrainte $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ soit toujours vérifiée. On peut appliquer alors l'involution P de façon à ce que la longueur de la suite $\lhd X_1$ soit plus grande ou égale à la longueur de la suite X_2 . Cette normalisation ne change pas l'équation étudiée mais donne naturellement un triplet de Cohn.

2.11.2. Cas général pour ε_1 et ε_2 . La proposition qui précède a été généralisée au cas où l'on n'a plus nécessairement la condition $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ ni a fortiori la normalisation introduite avant. On a trouvé par exemple pour T = (1):

PROPOSITION 2.12. On considère un triplet $(m, m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^3$ vérifiant les deux relations

$$-u - \varepsilon_2 = m_1^2 - (b + \partial K + 1)m_1m_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2m_2^2,$$

$$m = m_1^2 - \partial Km_1m_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2m_2^2.$$

Il est solution de l'équation $M^{s_1s_2}(b, \partial K, u)$. Si ce triplet correspond à une suite T = (1) avec laquelle on peut écrire $X_1 = (\exists X_2^*, c, 1)$, on a

$$\varepsilon_1 = -\varepsilon_2, \ \partial K = (c-b), \ m_1 = (c+1)m_2 + k_{21},$$

 $u + \varepsilon_2 = m_2^2 - (c+1)m_2k_{21} - k_{21}^2 = \Psi_{(c,1)}(m_2, k_{21}).$

Avec $c = b + \partial K$ et dans le cas où $m_1 - (c+1)m_2 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, condition assurée si u < 0, on peut construire une infinité de solutions de l'équation équilibrée associée grâce aux transformations G, DD, GD, avec T = (1) et X_2 suite définie avec $k_{21} = m_1 - (c+1)m_2 > 0$ par

$$\frac{m_2}{m_1 - (c+1)m_2} = [X_2], \det(M_{X_2}) = \varepsilon_2.$$

Les premières égalités de cette proposition proviennent des relations suivantes du cas général, spécialisées compte tenu de la suite T choisie :

$$-u - \varepsilon_2 \mu = m - (b+1)m_1 m_2, \ \mu m = m_1^2 - \partial K m_1 m_2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 m_2^2.$$

2.12. Remarques complémentaires. On a dans le cas général une forme quadratique $\Psi_{(c,T)}$

$$u + \varepsilon_2 \mu = \Psi_{(c,T)}(m_2, k_{21}) = (c\kappa_2 + \lambda)m_2^2 - (c\mu + \kappa_1 - \kappa_2)m_2k_{21} - \mu k_{21}^2.$$

Le discriminant de $\Psi_{(c,T)}$ est positif dans l'essentiel des cas, assurant que la forme $\Psi_{(c,T)}$ est indéfinie. Pour une valeur u donnée et sachant que $\varepsilon_2=\pm 1$, l'équation que l'on considère possède alors une infinité de solutions en (m_2,k_{21}) dès qu'elle en possède une. D'où une infinité de possibilités pour la suite X_2 lorsque la suite T est donnée. Un calcul comparable est faisable déterminant une infinité des possibilités pour T lorsque X_2 est donnée. Ceci permet de comprendre autrement l'existence de l'arbres des triplets de Cohn mis en évidence ci-dessus.

On a pu établir :

Proposition 2.13. Dans les cas où $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$, on a :

$$G = XYPX$$
, $GD = XYP$, $DD = XY$.

Ces expressions expliquent autrement pourquoi, dans le cas correspondant, on trouve des triplets de Cohn avec les trois transformations G, GD, DD. En effet on a déjà indiqué que ces triplets sont caractérisés par le fait qu'ils correspondent à des mots réduits qui commencent par XY.

2.13. Un exemple d'application. Tous les exemples peuvent être traités grâce aux méthodes qui précèdent. On illustre ici sur un cas, celui des équations $M^{++}(2,0,u)$. Pour $\partial K=0$, soit c=b. Avec $\varepsilon_1=\varepsilon_2=1$ on obtient :

$$m_1 = bm_2 + k_{21},$$

$$m = (b^2 + 1)m_2^2 + 2bm_2k_{21} + k_{21}^2 = m_2^2 + m_1^2,$$

$$u = (b - 1)m_2^2 - (b - 1)m_2k_{21} - k_{21}^2 - 1 = \Psi_{(c,T)}(m_2, k_{21}).$$

Ceci donne un triplet de Cohn $((bm_2 + k_{21}), m_2, 1)$ pour l'équation $M^{++}(b, 0, u)$. Pour b = 2 et une infinité de valeurs u = -s < 0, l'équation $M^{++}(2, 0, u)$ a des solutions $(m, m_1, m_2) \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^3$, notamment si on a avec $(p, q) \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^2$:

$$s = p^2 + q^2 + 1 - 3pq > 0.$$

On trouve une infinité de telles expressions avec les nombres de Fibonacci :

$$s = (1 + 4F_{2t+1}^2 - 2F_{2t+1}F_{2t} - F_{2t}^2) = F_{2t+3}^2 + F_{2t}^2 + 1 - 3F_{2t+3}F_{2t} > 0.$$

Dans d'autres cas, il n'y a aucune solution dans $(\mathbb{N}\setminus\{0\})^3$. On a en effet établi :

Proposition 2.14. Considérons une équation $M^{++}(2,0,u)$ avec u<0

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz - ux.$$

Elle possède des solutions $(m, m_1, m_2) \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^3$ si et seulement si on peut en trouver une vérifiant

$$0 < m < s = -u, \ 0 < m_2 < \sqrt{(s-m)m}.$$

Dans ce cas qui arrive pour une infinité de valeurs s>0, elle possède une infinité de solutions. De plus pour $0< s \leq 50$ l'équation $M^{++}(2,0,u)$ n'admet aucune solution lorsque l'on a

$$-u = s \in \{1, 3, 7, 9, 11, 19, 23, 27, 31, 43, 47\}.$$

Dans l'essentiel des cas on peut écrire :

$$0 < s = p_k^2 - 3p_k p_{k-1} + p_{k-1}^2 + 1 < m = p_k^2 + p_{k-1}^2, \quad m_2 = p_{k-1}.$$

Les nombres p_k et p_{k-1} se déduisent de nombres de Fibonacci et donnent des constantes de Markoff s'écrivant :

$$C(\theta_2(S)) = \frac{3p_k p_{k-1} - 1}{\sqrt{9(p_k^2 + p_{k-1}^2)^2 - 4}} < \frac{1}{3}.$$

Lorsque p_{k-1} augmente indéfiniment, ces constantes convergent vers la valeur (1/3). Ceci a donné :

Proposition 2.15. Le spectre de Markoff quadratique Mark a pour plus grande valeur d'accumulation (1/3), par valeurs inférieures et par valeurs supérieures.

La dernière proposition peut se déduire d'une autre expression :

$$-u = -(F_{2t}^2 + 6F_{2t+1}F_{2t} - F_{4t+3}) = F_{2t+1}^2 + F_{2t}^2 + 1 - 3F_{2t+1}F_{2t} < 0.$$

Pour une infinité des valeurs u>0 l'équation $M^{++}(2,0,u)$ a des solutions dans $(\mathbb{N}\setminus\{0\})^3$.

2.14. La condition de divisibilité équivalente et ses conséquences. Toute équation diophantienne $M^{s_1s_2}(a,\partial K,u_\theta)$ se déduit en réalité d'une simple condition de divisibilité :

$$m \mid m_1^2 - \partial K m_1 m_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_1 m_2^2$$
.

Supposons que l'on note $m_1^2 - \partial K m_1 m_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_1 m_2^2 = \mu m$, en remplaçant dans l'équation et simplifiant par $m \neq 0$ il reste

$$m + \varepsilon_2 \mu = (a+1)m_1 m_2 - u_\theta.$$

Cette expression détermine u_{θ} . En la combinant avec la précédente de façon à à éliminer le terme μ , on retrouve l'équation $M^{s_1s_2}(a,\partial K,u_{\theta})$ dont les propriétés essentielles sont donc contenues dans la seule condition de divisibilité. Sans éliminer μ , on a aussi l'équation $M^{-s_1,-s_2}(a,\partial K,u_{\theta}+2\varepsilon_2\mu)$. Ceci illustre le phénomène des équations à solutions communes évoqué dans [627]. Si l'on note maintenant

$$\partial^{a+1}K = \varepsilon_2(a+1)m + \partial K = \varepsilon_2((a+1)m + K_1 - K_2),$$

on a la condition de divisibilité équivalente

$$m \mid (m_1^2 - (\partial^{a+1} K) m_1 m_2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 m_2^2) = \phi_{\theta}(m_1, -\varepsilon_2 m_2).$$

Le discriminant $\Delta_0 = (\partial K)^2 - 4\varepsilon_1\varepsilon_2$ commun aux précédentes conditions de divisibilité permet de classifier les équations singulières, c'est-à-dire telles que $\Delta_0 \leq 0$ ou Δ_0 carré parfait, comme suit :

• Pour $\varepsilon_2=1,$ une équation $M^{s_1s_2}(a,\partial K,u_\theta)$ est dite point ue si elle est de forme :

$$x^{2} + y^{2} + z^{2} = (a+1)xyz - u_{\theta}x,$$

$$x^{2} + y^{2} + z^{2} = (a+1)xyz \pm yz - u_{\theta}x.$$

On dit qu'il s'agit d'une équation dégénérée lorsqu'elle s'écrit :

$$x^{2} + y^{2} + z^{2} = (a+1)xyz \pm 2yz - u_{\theta}x,$$
$$x^{2} + y^{2} - z^{2} = (a+1)xyz - u_{\theta}x.$$

• Pour $\varepsilon_2 = -1$, une équation est dite pointue si elle s'écrit :

$$x^{2} - y^{2} - z^{2} = (a+1)xyz - u_{\theta}x,$$

$$x^{2} - y^{2} - z^{2} = (a+1)xyz \pm yz - u_{\theta}x,$$

On dit qu'on a affaire à une équation dégénérée lorsqu'elle est de forme :

$$x^{2} - y^{2} - z^{2} = (a+1)xyz \pm 2yz - u_{\theta}x,$$

$$x^{2} - y^{2} + z^{2} = (a+1)xyz - u_{\theta}x.$$

2.15. Le cas des équations où u = 0. Considérons un nombre de Markoff $\theta_a(S)$ définissant la constante $C(\theta_a(S))$. L'application du lemme de Dickson [209] (ch.8, vol.2, p. 408-409) permet de faire l'hypothèse que l'on a :

$$S^* = (a_n, a_{n-1}, ..., a_0), \quad \forall i = 0, ..., n, \quad a_i \le a,$$

$$C(\theta_a(S)) = \frac{1}{\xi_0 - \xi_0'} = \frac{1}{a + [0, S, a] + [0, S^*, a]} = \frac{m}{\sqrt{\Delta_a(S)}}.$$

Dans le cas où le minimum donnant la constante est obtenu pour un unique indice $j \in \{0, 1, ..., (n+1)\}$, on dit que la constante est uniquement atteinte. Mais il peut être obtenu sur plusieurs indices différents $j \in \{0, 1, ..., (n+1)\}$, on dit dans ce cas

que la constante est multiplement atteinte. Si le minimum est atteint pour j = 0, on dit que l'on est dans le cas super-réduit.

Le cas super-réduit de constante multiplement atteinte a donné :

PROPOSITION 2.16. Dans le cas super-réduit où la constante de Markoff de $\theta_a(S)$ est obtenue pour deux indices différents 0 et $j \in \{1, ..., (n+1)\}$, on a une décomposition naturelle

$$S^* = (X_1, a, X_2),$$

Avec les paramètres associés à la suite S^* , l'équation de Markoff associée s'écrit $M^{s_1s_2}(a,\partial K,0)$

$$x^{2} + \varepsilon_{2}y^{2} + \varepsilon_{1}z^{2} = (a+1)xyz + \varepsilon_{2}\partial Kyz.$$

La situation décrite par cette proposition généralise celle de la théorie de Markoff classique. Pour $\varepsilon_1=\varepsilon_2=1$, la condition u=0 n'est d'ailleurs conciliable avec la condition $\partial K=0$ que lorsqu'on a a=2. C'est le sens du résultat démontré par G. Frobenius [274]. Pour généraliser l'équation de Markoff classique à d'autres cas identifiés par la dernière proposition, on doit supposer $\partial K \neq 0$. Et une réciproque de cette proposition est facile. Ces résultats ont permis d'étudier [628] des équations comme $M^{++}(2,2,0)$ de solution (3,1,1), $M^{++}(2,-2,0)$ de solution (3,2,1), $M^{++}(3,-1,0)$ de solution (3,1,1), ainsi que les constantes associées.

2.16. Application à l'étude du spectre de Markoff. La méthode d'analyse du spectre de Markoff développée par l'auteur [625] a été illustrée ci-dessus au voisinage de (1/3). Elle consiste à utiliser une équation donnée $M^{s_1s_2}(a,\partial K,u_\theta)$ pour décrire un endroit particulier du spectre. Chaque solution d'une telle équation fournit des suites X_2 et T, et permet la construction d'une constante de forme $C(\theta_a(S)) = C(F_\theta)$ dans le spectre quadratique. Par ailleurs, les branches infinies données par tout bouquet de solutions de l'équation fournissent des points d'accumulation du spectre algébrique Mark. Ces points peuvent correspondre, comme dans la théorie de Markoff classique à des constantes de formes quadratiques à coefficients réels. Ce sont alors des constantes du spectre de Markoff complet. L'opération de passage de Mark au spectre complet ([180] Chapitre 3, [181]) correspond à une opération de fermeture topologique. Le spectre de Markoff est ainsi analysé comme superposition de sous-ensembles de constantes de nombres quadratiques $\theta_a(S)$ et de leurs points d'accumulation. On a trouvé ainsi de nouveaux trous du spectre et évalué sa complexité au voisinage de (1/3).

On peut montrer avec l'expression de $C(\theta_a(S))$ que cette constante est située dans le segment

$$U_a = \left[\frac{1}{\sqrt{a^2 + 4a}}, \frac{1}{\sqrt{a^2 + 4}}\right].$$

Le segment U_1 est réduit à l'ensemble $\{1/\sqrt{5}\}$ qui contient la plus grande constante du spectre de Markoff. Le segment U_2 donne dans sa partie supérieure, entre (1/3) et $(1/\sqrt{8})$ les constantes fournies par la théorie de Markoff classique. Ce sont des nombres isolés à l'exception du plus petit (1/3) qui est un point d'accumulation par valeurs supérieures de constantes de Markoff. Il est connu qu'au dessus de la valeur (1/3, 334367...) de R. T. Bumby le spectre des constantes de Markoff est de mesure nulle ([180] p. 76). Comme l'a montré Mary E. Gbur Flahive [285], cette partie du spectre contient cependant une infinité de points d'accumulation dont la valeur $(1/(\sqrt{5}+1))$ découverte par C. J. Hightower [342]. J. R. Kinney et T. S. Pitcher ont affiché l'existence d'une infinité de trous dans le spectre de Markoff au

dessus de $(1/\sqrt{12})$, aussi près que souhaité de cette valeur qui est également un point d'accumulation de valeurs du spectre, mais l'existence de ces trous reste à confirmer ([619] IV 143). L'ensemble U_2 ne rencontre pas l'ensemble U_3 , ce qui met en évidence un trou bien connu du spectre de Markoff

$$]\frac{1}{\sqrt{13}}, \frac{1}{\sqrt{12}}[.$$

La valeur $(1/\sqrt{13})$ est la plus grande valeur de U_3 . Elle est isolée comme l'a montré O. Perron ([180] p. 15) en exhibant le trou maximal

$$]\frac{22}{65+9\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{13}}[.$$

La plus petite valeur de U_3 est $(1/\sqrt{21})$, elle est donc aussi comprise dans U_4 dont la plus grande valeur vaut $(1/\sqrt{20})$. Entre les deux dernières bornes citées se trouve la valeur \mathbf{F} de G. A. Freiman ([180] p. 55) située au bord d'un trou du spectre, et telle que toute valeur réelle comprise entre 0 et \mathbf{F} soit une constante de Markoff :

$$\mathbf{F}^{-1} = 4 + \frac{253589820 + 283748\sqrt{462}}{491993569}.$$

C'est dans la partie basse de U_2 et dans la partie haute de U_3 que la distribution des constantes de Markoff est la plus mal connue et que l'on travaille donc.

Lorsque la valeur de a augmente, le nombre de possibilités pour les suites T et X_2 s'accroît. La distribution des constantes dans le segment U_{a+1} est ainsi plus compliquée que celle existant dans U_a . Toute constante $C(\theta_a(S))$ de U_a dans cet ensemble donne de plus grâce au lemme de Dickson ([123] p. 408) une valeur de U_{a+1} elle-même point d'accumulation du spectre. Ainsi la plus grande constante du spectre de Markoff $(1/\sqrt{5}) \in U_1$ donne le point d'accumulation $(1/(1+\sqrt{5}))$ de C. J. Hightower dans U_2 . L'article de W. R. Lawrence [464] montre un phénomène comparable mais de plus grande complexité, en établissant que la distribution des constantes de Markoff dans la partie basse de l'ensemble U_a est plus compliquée que celle que l'on trouve dans sa partie haute.

Décrivant le spectre par valeurs décroissantes, plus on se rapproche de 0 plus sa complexité croît. Après une partie discrète, puis une autre cantorienne, l'aspect chaotique du spectre disparaît d'un coup lorsqu'il devient continu sous la valeur de Freiman **F**. Une telle structure ressemble à celle du spectre d'un opérateur.

3. Perspectives

Une méthode de résolution des équations $M^{s_1s_2}(a,\partial K,u_\theta)$ a été mise au point. On a donné de nombreux exemples d'équations dont toutes les solutions sont connues et entrent dans notre formalisme général. Un projet important est de résoudre le maximum d'équations de ce type pour approfondir la connaissance du spectre de Markoff. On peut automatiser cette résolution. Une des difficultés pour fournir des résultats généraux concerne le calcul du maximum qui définit toute constante de Markoff. Sur tous les cas pratiques ce n'est pas un problème grâce à la théorie du polygone de Klein [430].

La méthode que l'on a développée pour étudier nos équations rend moins cruciale une démonstration de la conjecture de Frobenius, Cassels et Zagier [861] [108] pour l'arbre de la théorie de Markoff classique. On a d'ailleurs pu montrer dans [628] que cette conjecture est bien spécifique à la théorie classique. On n'a pas de résultat

analogue pour les triplets d'autres équations $M^{s_1s_2}(a,\partial K,u_\theta)$. La conjecture reste cependant ouverte, et on peut l'aborder avec les procédés qui ont été résumés dans ce qui précède. Cependant, cette approche n'a pas encore permis de conclure.

La notion de hauteur est essentielle pour faire fonctionner l'algorithme que l'on a mis au point pour résoudre nos équations. En fait il s'agit simplement d'une méthode de descente infinie adaptée de celle très classique de Pierre De Fermat. On dispose donc maintenant d'un ensemble d'exemples concrets d'équations diophantiennes non complètement triviales sur lesquelles tester un certain nombre de conjectures classiques sur les hauteurs ([457] chapitre 2).

On a vu dans le chapitre précédent que nos équations étaient aussi données par une formule de trace (voir [632]). La question se pose de savoir si toutes le sont. Ceci revient à approfondir la façon dont le groupe du triangle T_3 se plonge dans $GL(2,\mathbb{Z})$, et à généraliser l'approche de [629] par la trace à toutes nos équations. Un point particulier sur lequel l'auteur voudrait se pencher est le fait que tout groupe dénombrable G puisse être plongé en tant que sous groupe de $GL(2,\mathbb{Z})$. On pourrait ainsi définir une trace pour ses éléments [468], et la question se pose de savoir si cette trace dépend du plongement que l'on considère. Ceci donnerait aussi un début de réponse à la problématique évoquée dans [9] et explicable par le fait que tout groupe de matrices fermé dans $GL(n,\mathbb{R})$ est un groupe de Lie [41]. On pourrait aussi pour un tel groupe G considérer les relations $\Re_{\mathbf{G}}$ et $_{\mathbf{G}}\Re$ qui s'en déduisent à droite et à gauche. On trouverait au quotient une structure arborescente. Pour G d'indice fini dans $GL(2,\mathbb{Z})$ ceci fait un lien avec la théorie des dessins d'enfants ([823] p. 99). Et lorsque G est fini, ceci fait un lien avec l'interprétation de nos equations. Ce développement conduit à généraliser notre article [629] avec une véritable correspondance de Galois entre groupes finis ou dénombrables et structures arborescentes définies dans $GL(2,\mathbb{Z})$, ainsi que sur une approche de la théorie de Galois inverse [733]. Les conséquences pour les groupes de tresses et les groupes de classes d'applications (mapping class groups au sens de [74]) pourraient se révéler très importantes. Ceux-ci sont en effet dénombrables, et seraient donc aussi plongeables dans $GL(2,\mathbb{Z})$, tout comme les groupes $GL(a+1,\mathbb{Z})$ dont les propriétés seraient donc accessibles par $GL(2,\mathbb{Z})$, groupe dont on voudrait aussi développer l'arithmétique.

Une perspective connexe est d'étendre ce qui précède à $GL(a+1,\mathbb{Z})$ et des équations possédant un nombre plus grand de termes, comme par exemple celle déjà étudiée par A. Hurwitz qui généralise l'équation de Markoff classique [43] :

$$\sum_{i=0}^{i=a} x_i^2 = (a+1) \prod_{i=0}^{i=a} x_i.$$

Les résultats sous-jacents relatifs à des arbres \mathbf{T}_{a+1} à a+1 branches en chaque noeud, et généralisant \mathbf{T}_3 , pourraient s'avérer très importants. Le lien entrevu dans [629] avec le théorème de Dyer et Formanek [497] laisse penser que des résultats profonds entre \mathbf{T}_{a+1} et $GL(a+1,\mathbb{Z})$ sont ainsi accessibles.

L'auteur envisage aussi d'étudier la façon dont $GL(2,\mathbb{Z})$ est utilisable pour coder de l'information. Des idées de ce genre ont déjà été présentées par W. Magnus qui a travaillé pour la société Telefunken après 1930 (voir [510] p. 186).

CHAPITRE 3

Approche algébrique

1. Introduction

La question étudiée ensuite concerne la signification algébrique de nos équations diophantiennes $M^{s_1s_2}(a,\partial K,u_\theta)$. On a pu en donner une interprétation grâce aux réseaux de rang 2 sur \mathbb{Z} . Ceci a permis de poursuivre le classement de ces équations diophantiennes avec ce qui est connu pour les corps quadratiques, et de réinterpréter certains des résultats déjà obtenus. Une observation essentielle a été que tout réseau complet d'un corps quadratique donne en fait naissance à une équation de Markoff généralisée, permettant d'envisager ses bouquets de solutions comme décrivant des relations entre des idéaux d'ordres quadratiques. On a aussi montré comment nos équations donnent des indications sur les points entiers et rationnels des courbes elliptiques en les plongeant dans des surfaces cubiques qui sont rationnelles. Ce point fait apparaître un phénomène quantique de changement brutal des caractéristiques d'une courbe elliptique réelle lorsque le plan qui lui donne naissance à l'intersection avec la surface cubique se déplace. Toute courbe elliptique réelle peut être obtenue ainsi, ceci ouvre une perspective intéressante. Le contenu de ce chapitre a été présenté aux Journées Arithmétiques de Lille [631].

2. Lien de nos équations avec des corps quadratiques réels

Dans l'essentiel des cas le nombre $\Delta_{\phi} = ((a+1)m + K_1 - K_2)^2 - 4\varepsilon_1\varepsilon_2$ est positif. La condition de divisibilité condensant l'équation $M^{s_1s_2}(a,\partial K,u_{\theta})$ s'écrit :

$$4m \mid (2m_1 - \partial^{a+1}Km_2)^2 - \Delta_{\phi}(m_2)^2 = 4\phi_{\theta}(m_1, -\varepsilon_2 m_2).$$

Deux cas apparaissent selon la parité de $\partial^{a+1}K = \varepsilon_2((a+1)m + K_1 - K_2)$, que l'on regroupe en posant

$$\tau = 0 \text{ et } d = \frac{\Delta_{\phi}}{4} \text{ si } \Delta_{\phi} \equiv 0 \text{ (mod 4)}, \quad \tau = 1 \text{ et } d = \Delta_{\phi} \text{ si } \Delta_{\phi} \equiv 1 \text{ (mod 4)},$$

$$k = \frac{\partial^{a+1}K - \tau}{2} \in \mathbb{Z}, \quad \varpi = \frac{\tau + \sqrt{\Delta_{\phi}}}{2} = \frac{\tau + \sqrt{d}}{2^{\tau}},$$

$$P_{\varpi}(x) = \frac{(2x - \tau)^2 - \Delta_{\phi}}{4} = x^2 - \tau x - \frac{\Delta_{\phi} - \tau}{4}.$$

Avec ces notations, la condition de divisibilité s'écrit simplement

$$m \mid m_2^2 P_{\varpi}(\frac{m_1 - m_2 k}{m_2}).$$

Dans le cas d'équations dégénérées, $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ n'est pas un corps quadratique. Dans le cas d'équations pointues, $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ est un corps quadratique imaginaire, $\mathbb{Q}(i)$ pour les cas pointus n°1 où l'on retrouve la théorie de Markoff classique, $\mathbb{Q}(j)$ pour les

cas pointus $n^{\circ}2$. Dans les autres cas $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ est un corps quadratique réel lié à l'équation $M^{s_1s_2}(a,\partial K,u_{\theta})$.

2.1. Construction de \mathbb{Z} -modules complets. L'étude de la condition de divisibilité mise en évidence est un problème très classique de théorie des nombres (voir par exemple [465] Tome 1 p. 200). Elle s'interprète dans le corps quadratique $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ en posant avec $\delta = \operatorname{pgcd}(m, m_1, m_2) > 0$:

$$\mathbf{c}_2 = m/\delta, \ \mathbf{e}_2 \equiv (m_2 k - m_1)/\delta \ (\mod \mathbf{c}_2) \text{ avec } 0 \le \mathbf{e}_2 < \mathbf{c}_2, \ \mathbf{f}_2 = m_2/\delta > 0,$$

Avec par exemple [252] (p. 11) ou [80] (pp. 144-169), elle signifie qu'il existe un \mathbb{Z} -module complet de $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, dit aussi réseau de rang 2 sur \mathbb{Z} . Il s'agit d'un idéal de l'ordre $\mathcal{O}_{m_2} = \mathbb{Z}[m_2\varpi]$ du corps quadratique $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ noté

$$\mathbb{M}_2^{\diamond} = (\delta)(\mathbf{c}_2; \mathbf{e}_2 + \mathbf{f}_2 \varpi) = \{xm + y(m_2(k + \varpi) - m_1) \mid x, y \in \mathbb{Z}\}.$$

L'anneau des stabilisateurs du réseau \mathbb{M}_2^{\diamond} est un ordre $\mathcal{O}_{\mathbf{c}_2} = \mathbb{Z}[(m_2/\delta)\varpi]$ de $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$. En tant que module sur \mathbb{Z} le réseau \mathbb{M}_2^{\diamond} a pour norme $N(\mathbb{M}_2^{\diamond}) = m\delta$. La forme quadratique associée à cette base est à coefficients dans \mathbb{Z} et s'écrit :

$$f_{\mathbb{M}_{2}^{\circ}}(x,y) = \frac{1}{\delta}(mx^{2} + (m_{2}\partial^{a+1}K - 2m_{1})xy + (\mu - \varepsilon_{2}(a+1)m_{1}m_{2})y^{2}).$$

Le lien avec les formes quadratiques $\phi_{\theta}(z,y)$ et $F_{\theta}(x,y)$ apparaît alors en posant $\mathbf{z} = mx - m_1y$ et $\mathbf{y} = \varepsilon_2 m_2 y$ dans la forme $f_{\mathbb{M}_2^{\diamond}}$ associée à \mathbb{M}_2^{\diamond} :

$$m\delta f_{\mathbb{M}_2^{\circ}}(x,y) = \phi_{\theta}(\mathbf{z},\mathbf{y}) = N(\mathbf{z} - \mathbf{y}(m\theta_a(S) - K_1)).$$

La forme ϕ_{θ} est donc une norme du corps quadratique $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, ce qui explique sa propriété de multiplicativité. Les calculs précédents mettent l'accent sur le réseau $\mathbb{M}_{\theta} = \{\mathbf{x}m - \mathbf{y}m\theta_{a}(S) \mid \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{Z}\}$, avec lequel on a obtenu :

PROPOSITION 2.1. La forme quadratique associée à $[1, -(m\theta_a(S) - K_1)]$ base de l'ordre maximal $\mathcal{O}_{\theta} = \mathbb{Z}[\varpi] = \mathbb{Z}[-(m\theta_a(S) - K_1)]$ du corps quadratique $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ vaut, avec $N(\mathcal{O}_{\theta}) = 1$,

$$\phi_{\theta}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = f_{\mathcal{O}_{\theta}}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = N(\mathbf{z} - \mathbf{y}(m\theta_a(S) - K_1)).$$

Cet ordre contient un idéal entier $\mathbb{M}_{\theta} = \{\mathbf{x}m + \mathbf{y}m\theta_a(S) \mid \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{Z}\}$, de norme m, et dont la forme quadratique associée à la base $[m, -m\theta_a(S)]$ vaut

$$mF_{\theta}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f_{\mathbb{M}_{\theta}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{N(\mathbf{x} - \mathbf{y} m \theta_{a}(S))}{N(\mathbb{M}_{\theta})}.$$

- **2.2.** D'autres \mathbb{Z} -modules complets. L'ordre $\mathcal{O}_{m_2} = \mathbb{Z}[m_2\varpi]$ est un sous-anneau de l'ordre maximal \mathcal{O}_{θ} . On peut poser avec son idéal \mathbb{M}_2^{\diamond} :
 - Pour $\varepsilon_2 = 1$:

$$\mathbb{M}_2 = \mathbb{M}_2^{\diamond} = \{(x + y((a+1)m_2 - k_2))m + (ym_2)m\theta_a(S) \mid x, y \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{M}_{\theta}.$$

• Pour $\varepsilon_2 = -1$:

$$\overline{\mathbb{M}_2} = \mathbb{M}_2^{\diamond} = \{ (x - y((a+1)m_2 - k_2))m - (ym_2)m\overline{\theta_a(S)} \mid x, y \in \mathbb{Z} \} \subset \overline{\mathbb{M}_{\theta}}.$$

Avec le réseau
$$\mathbb{M}_{\delta\theta} = \{\mathbf{x}m - \mathbf{y}\delta m\theta_a(S) \mid \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{Z}\}\ de\ \mathbb{Q}(\sqrt{d}),\ on\ a\ alors:$$

Proposition 2.2. Avec les notations précédentes et les réseaux introduits, la condition de divisibilité donne les inclusions

$$\mathbb{M}_2 \subset \mathbb{M}_{\delta\theta} \subset \mathbb{M}_{\theta}, \ \overline{\mathbb{M}_2} \subset \overline{\mathbb{M}_{\delta\theta}} \subset \overline{\mathbb{M}_{\theta}}.$$

- **2.3.** Une décomposition en produit. Dans ce que l'on vient de voir, on aurait pu permuter m_1 et m_2 . D'où un calcul comparable à ce qui précède, dans l'ordre $\mathcal{O}_{m_1} = \mathbb{Z}[m_1\varpi]$ du même corps quadratique $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$. Ceci définit un réseau $\mathbb{M}_1^{\diamond} = (\delta)(\mathbf{c}_1; \mathbf{e}_1 + \mathbf{f}_1\varpi)$, sa norme $m\delta$, sa forme quadratique associée de discriminant $(m_1^2\Delta_{\phi}/\delta^2)$, son anneau de stabilisateurs $\mathcal{O}_{(m_1/\delta)} = \mathbb{Z}[(m_1/\delta)\varpi]$. La forme quadratique associée se calcule facilement. L'ordre $\mathcal{O}_{m_1} = \mathbb{Z}[m_1\varpi]$ est un autre sous-anneau de l'ordre maximal \mathcal{O}_{θ} qui permet de poser :
 - Pour $\varepsilon_1 = -1$:

$$\mathbb{M}_1 = \mathbb{M}_1^{\diamond} = \{(x - yk_1)m + (ym_1)m\theta_a(S) \mid x, y \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{M}_{\delta\theta} \subset \mathbb{M}_{\theta}.$$

• Pour $\varepsilon_1 = 1$:

$$\overline{\mathbb{M}_1} = \mathbb{M}_1^{\diamond} = \{(x + yk_1)m - (ym_1)m\overline{\theta_a(S)} \mid x, y \in \mathbb{Z}\} \subset \overline{\mathbb{M}_{\delta\theta}} \subset \overline{\mathbb{M}_{\theta}}.$$

Il devient alors intéressant de considérer le produit $\mathbb{M}_1\mathbb{M}_2$, ce qui a bien un sens ([252] p.20). En complétant avec les classes de similitude [252] (p. 22), on a ainsi obtenu :

PROPOSITION 2.3. Dans l'idéal $\mathbb{M}_{\delta\theta} = \{\mathbf{x}m - \mathbf{y}\delta m\theta_a(S) \mid \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{Z}\}$ de l'ordre $\mathcal{O}_{\theta} = \mathbb{Z}[\varpi]$ existent deux réseaux

$$\mathbb{M}_1 = \{(x - yk_1)m + (ym_1)m\theta_a(S) \mid x, y \in \mathbb{Z}\},\$$

$$\mathbb{M}_2 = \{ (x + y((a+1)m_2 - k_2))m + (ym_2)m\theta_a(S) \mid x, y \in \mathbb{Z} \}.$$

Le premier est un idéal de l'anneau $\mathcal{O}_{m_1} = \mathbb{Z}[m_1\varpi]$. Il possède pour anneau de stabilisateurs $\mathcal{O}_{(m_1/\delta)} = \mathbb{Z}[(m_1/\delta)\varpi]$ et a pour norme $m\delta$. Le second est un idéal de l'anneau $\mathcal{O}_{m_2} = \mathbb{Z}[m_2\varpi]$. Il possède en tant qu'anneau de stabilisateurs l'ordre $\mathcal{O}_{(m_2/\delta)} = \mathbb{Z}[(m_2/\delta)\varpi]$ et a aussi pour norme $m\delta$. Enfin on a

$$\mathbb{M}_1 \mathbb{M}_2 = m \mathbb{M}_{\delta \theta} = \{ \mathbf{x} m^2 - \mathbf{y} \delta m^2 \theta_a(S) \mid \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{Z} \},$$

ou avec les classes de similitudes des réseaux $[M_1][M_2] = [M_{\delta\theta}]$. On a des conditions comparables pour les réseaux conjugués.

2.4. Equation d'un \mathbb{Z} -module complet quelconque. La donnée d'un idéal $\mathbf{I} = (\delta)(\mathbf{c}; \mathbf{e} + \mathbf{f}\varpi)$ quelconque dans un ordre \mathcal{O}_{m_2} d'un corps quadratique $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, où d sans facteur carré, conduit inversement à une condition de divisibilité et à une équation diophantienne, et ceci pour toute valeur m_2 . Pour le voir, on généralise les calculs précédents en les prenant à l'envers. Ceci a donné :

PROPOSITION 2.4. Tout idéal d'un ordre \mathcal{O}_{m_2} d'un corps quadratique quelconque $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ définit une relation diophantienne. Avec les conditions $\varepsilon_2' \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ et $\varepsilon_1' = \varepsilon_2' \varepsilon' \in \mathbb{Z}$ elle s'écrit

$$m^2 + \varepsilon_2' m_1^2 + \varepsilon_1' m_2^2 = (a+1)m m_1 m_2 - \varepsilon_2' \partial^{a+1} m_1 m_2 - u' m.$$

Elle correspond avec $(m, m_1, m_2) \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^3$ aux conditions suivantes où $\partial^{a+1} \in \mathbb{Z}$ et $\varepsilon' \in \mathbb{Z}$

$$m \mid (m_1^2 - \partial^{a+1} m_1 m_2 + \varepsilon' m_2^2), \ \delta = pgcd(m, m_1, m_2).$$

Une telle équation en (m, m_1, m_2) généralise nos équations $M^{s_1s_2}(a, \partial K, u_\theta)$. Elle est différente de celles étudiées dans [561] ou [682]. Elle correspond seulement à la donnée d'un réseau d'un corps quadratique. Le fait que toute forme quadratique entière binaire indéfinie peut être réduite, et donne donc une forme de Markoff, montre que l'on peut traiter la résolution des nouvelles équations ici mises en évidence par les mêmes moyens que ceux développés ci dessus. De telles équations ont par exemple été étudiées par G. Rosenberger [682]. Remarquons que la proposition que l'on vient de faire s'applique pour tout idéal d'un ordre de corps quadratique quelconque, même avec d négatif. La situation ici décrite est donc beaucoup plus générale que celle que l'on envisageait ci-dessus. La différence est que l'on a $\varepsilon'_1 \in \mathbb{Z}$, $\varepsilon'_2 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. La décomposition en produit de deux réseaux apparaît maintenant liée au fait que l'on a $\varepsilon' = \pm 1$, et donc que Δ_{ϕ} est de forme $(\partial^{a+1})^2 \pm 4$. Cette propriété permet d'échanger les rôles de m_1 et m_2 dans la condition de divisibilité, donc de construire un autre idéal avec lequel le produit d'idéaux peut être fait.

En réalité, pour parvenir à la dernière proposition on a imposé la contrainte supplémentaire que d soit sans facteur carré. Si l'on admet au contraire de poser $\Delta_{\phi} = (\partial^{a+1})^2 \pm 4 = \lambda^2 d$, avec $\lambda \in \mathbb{Z}$, ce qui ne change pas le corps quadratique que l'on considère et conduit à résoudre un équation de Pell-Fermat pour identifier λ , on peut développer le calcul précédent en imposant ε'_1 , $\varepsilon'_2 \in \{-1, +1\}$. Ceci montre que nos équations sont en fait aussi générales que les précédentes. En choisir une revient lorsqu'elle est non singulière à considérer un réseau complet dans un corps quadratique, et non un réseau quelconque d'un tel corps.

On a pu développer cette approche en examinant la signification pour nos équations du fait que les réseaux correspondants sont strictement semblables, ainsi que la traduction pour les réseaux de l'action du groupe du triangle \mathbf{T}_3 sur les solutions et de l'existence d'un nombre fini de bouquets de solutions. On trouve dans [353] des indications sur l'interprétation géométrique qui peut être donnée de tels résultats. Le formalisme qui en découle permet de systématiser les résultats disponibles sur le lien entre arbres, ordres maximaux et formes quadratiques, tels que cités dans [610] ou [807] (p. 41). Le point essentiel en vue est un lien entre le nombre de classes d'un corps quadratique et le nombre de bouquets de solutions pour certaines de nos équations.

3. Lien de nos équations avec les courbes elliptiques

L'idée approfondie maintenant peut être comprise très simplement de façon géométrique. Avec des variables $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on considère une surface cubique réelle d'équation $M^{s_1s_2}(b,\partial K,u)$. Coupée par un plan, elle donne une courbe cubique dont on établit dans différents cas qu'elle est elliptique. Disposant alors, grâce à l'action du groupe \mathbf{T}_3 , d'informations sur les points entiers de la surface, on espère en déduire des conséquences pour les points entiers de la courbe elliptique. Différentes tentatives faites pour concrétiser cette idée sur l'équation de Markoff classique se sont révélées infructueuses. Mais on a pu la développer sur nos équations généralisées, on va expliquer comment et pourquoi. On donne d'abord un exemple pour montrer comment cette approche fonctionne.

3.1. Un exemple. On considère l'équation $M^{++}(2,0,-2)$. On connaît un triplet de solutions $(m,m_1,m_2)=(73,8,3)$. Il correspond aux paramètres

$$K_1 = K_2 = 46, k_1 = k_{12} = 5, k_2 = k_{21} = 2.$$

Ces valeurs vérifient par exemple la relation $2m_1 = 5m_2 + 1$. En la combinant avec la relation $M^{++}(2,0,-2)$ liant m, m_1, m_2 , on obtient :

Proposition 3.1. Considérons la courbe réelle E d'équation cubique

$$30xz^2 - 4x^2 + 6xz - 29z^2 + 8x - 10z - 1 = 0,$$

Il s'agit d'une courbe elliptique où existe un point entier $(x,z)=(m,m_2)=(73,3)$. Inversement tout point entier $(x,z)=(m,m_2)\in\mathbb{Z}^2$ de cette courbe elliptique E est de plus tel qu'il existe un point entier $(x,y,z)=(m,m_1,m_2)\in\mathbb{Z}^3$ situé sur la surface cubique réelle $M^{++}(2,0,-2)$ d'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz + 2x.$$

La partie délicate consiste à démontrer que E est bien elliptique. On utilise pour cela l'algorithme de réduction de Nagell [579], tel qu'il est présenté dans [140] ou [157]. On renvoie à [632] pour la démonstration effective.

3.2. Cas singuliers. On désigne par $M^{s_1s_2}(b,\partial K,u)$ la surface cubique que l'on considère, notée comme l'équation la définissant. On la coupe par un plan $\Pi_{(t_{1,\rho},t_{2,\rho})}$ d'équation $u=t_{1,\rho}z-t_{2,\rho}y$. Cette équation dérive de l'expression de u déjà vue, sachant que l'on note avec $\rho\in\mathbb{Z}$

$$t_{1,\rho} = k_1 + k_{12} - \rho m_1 = t_1 - (\rho - 1)m_1, \ t_{2,\rho} = k_2 + k_{21} - \rho m_2 = t_2 - (\rho - 1)m_2.$$

L'intersection est une courbe que l'on note $E_{(t_{1,\rho},t_{2,\rho})}$.

Le calcul précédent ne peut absolument pas fonctionner pour l'équation de Markoff classique $M^{++}(2,0,0)$ car elle donne $t_1=t_2=u=0$. Dans un tel cas dit totalement singulier, le plan $\Pi_{(t_{1,\rho},t_{2,\rho})}$ avec lequel couper notre surface cubique n'est pas défini. A fortiori, on n'obtient pas une courbe elliptique, même en changeant la valeur de ρ . De nombreux cas totalement singuliers ont pu être fabriqués. Hors ces cas qu'on laisse maintenant de côté, on voit que d'autres situations dites partiellement singulières se présentent. Le plan $\Pi_{(t_{1,\rho},t_{2,\rho})}$ est calculable, mais son intersection avec la surface cubique $M^{s_1s_2}(b,\partial,u)$ est une courbe de degré inférieur ou égal à 2. On a donné des exemples dans [632].

3.3. Cas général. On considère maintenant les cas non singuliers où l'on a nécessairement $t_{1,\rho}t_{2,\rho}\neq 0$. Pour la courbe cubique $E_{(t_{1,\rho},t_{2,\rho})}$ on trouve une équation à coefficients entiers. L'algorithme de Nagell peut lui être appliqué. Hors quelques cas particuliers que l'on peut expliciter, la courbe fabriquée par cet algorithme est elliptique. Les cas qui échappent peuvent être étudiés de façon séparée. De sorte qu'on a mis en évidence pour toute surface cubique réelle $M^{s_1s_2}(b,\partial K,u)$ un ensemble de courbes elliptiques $E_{(t_{1,\rho},t_{2,\rho})}$ qui lui sont attachées, et de points entiers en nombre fini sur la courbe $E_{(t_{1,\rho},t_{2,\rho})}$ qui sont également sur la surface. En se limitant à $\rho=0$, tout point entier de la surface cubique $M^{s_1s_2}(b,\partial K,u)$ apparaît sur une courbe elliptique $E_{(t_{1,\rho},t_{2,\rho})}$ contenue dans la surface.

Inversement, si l'on considére un point entier $(x,z)=(m,m_2)\in\mathbb{Z}^2$ d'une courbe elliptique $E_{(t_{1,\rho},t_{2,\rho})}$, son équation fournit dans \mathbb{Z} une condition qui impose que m_1 soit rationnel. La forme particulière de l'équation de degré 2 en m_1 déduite de l'équation $M^{s_1s_2}(b,\partial K,u)$ montre alors qu'en réalité m_1 est entier.

En d'autres termes les points entiers de la courbe $E_{(t_{1,\rho},t_{2,\rho})}$ sont exactement les points entiers de la surface $M^{s_1s_2}(b,\partial K,u)$ qui sont situés dans le plan $\Pi_{(t_{1,\rho},t_{2,\rho})}$.

Par le théorème de Mordell ([561] chapter 27), on ne trouve qu'un nombre fini de points entiers sur la courbe $E_{(t_{1,\rho},t_{2,\rho})}$. Cependant, en général la surface $M^{s_1s_2}(b,\partial K,u)$ possède une infinité de points entiers comme on l'a vu avec les contructions arborescentes faites au moyen des triplets de Cohn. Ils se classent d'ailleurs, dans le cas le plus général, en un nombre fini d'orbites pour l'action du groupe \mathbf{T}_3 . Ceci permet de classer les points de la courbe $E_{(t_{1,\rho},t_{2,\rho})}$. Pour

des compléments sur les points entiers des courbes elliptiques et leur calcul effectif, on renvoie à [757] (XIII.3.). Une étude plus globale de cette situation reste à faire, sachant que le contexte des surfaces elliptiques ([748] chapter 3) fournit des éléments de compréhension intéressants et que l'on peut considérer des plans plus généraux avec lesquels couper la surface.

- **3.4.** Description géométrique de la surface cubique. La surface réelle cubique $M^{s_1s_2}(b,\partial K,u)$ peut être étudiée avec des méthodes classiques de géométrie algébrique (voir par exemple [329]). On complexifie les variables pour simplifier les énoncés lorsque c'est nécessaire.
 - 3.4.1. Points singuliers. L'équation définissant la surface est d'ordre 3 est :

$$F(x, y, z) = (b+1)xyz - x^2 - \varepsilon_2 y^2 - \varepsilon_1 z^2 + \varepsilon_2 \partial Kyz - ux = 0.$$

Les points singuliers non à l'infini, points doubles lorsqu'ils existent, sont calculables :

$$x = 0, \ \partial K = \pm 2, \ 2z = \partial Ky, \ u = (b+1)yz,$$
$$x = u = (\varepsilon_2 \varepsilon'(b+1)y^2/3), \ \varepsilon_2 \partial K = 2\varepsilon' - u(b+1), \ z = \varepsilon_2 \varepsilon' y.$$

En dehors de tous ces cas qui sont assez nombreux et contiennent par exemple la théorie de Markoff classique, la surface ne possède pas de point singulier, et est donc non singulière.

3.4.2. Génératrices. La surface a des points doubles à l'infini, les points à l'infini des axes du repère. Il s'agit des sommets A, B, C, d'un triangle dont les côtés sont des génératrices, c'est-à-dire des droites contenues dans la surface, mais dans ce cas situées à l'infini sur la surface. Par construction, les autres génératrices de la surface sont à distance finie et parallèles à l'un des plans de coordonnées. Elles peuvent toutes être calculées [632]. Au total il existe huit génératrices parallèles au plan yOz. Par le même procédé on obtient huit génératrices parallèles au plan xOy et huit génératrices parallèles au plan xOz.

Au total, on trouve ainsi les $(3\times8)+3=27$ génératrices réelles ou complexes de Cayley et Salmon pour la surface cubique étudiée [338]. En utilisant une méthode classique (par exemple [84] p. 466) on en déduit une représentation rationnelle de la surface qui ne fait que traduire dans ce cas particulier le fait que toute surface du troisième ordre est rationnelle (unicursale). Il est intéressant d'expliciter une telle représentation rationnelle de $M^{s_1s_2}(b,\partial K,u)$ pour comprendre, à l'intersection avec des plans comme ceux utilisés dans ce qui précède, les conséquences pour les courbes elliptiques que l'on a mises en évidence ci-dessus. Dans le cas où un point double existe à distance finie sur la surface, toute droite passant par ce point définit aussi une telle représentation rationnelle de la surface cubique. Dans les autres cas, on peut également appliquer la méthode de la tangente due à B. Segre [715] pour construire une représentation rationnelle de la surface.

3.4.3. Représentation rationnelle de la surface cubique réelle. On a décrit dans [632] la construction d'une telle représentation. On considère la trace de la surface d'équation $M^{s_1s_2}(b,\partial K,u)$ dans le plan $(b+1)x+\varepsilon_2\partial K=0$. C'est en dehors de cas limites ou impossibles, une conique. Ceci permet de considérer un point $\Omega(\mathcal{X},\mathcal{Y},\mathcal{Z})$ sur cette conique dont les coordonnées sont écrites avec un premier paramètre μ . On passe alors dans un repère d'origine Ω avec $x=\mathcal{X}+x_0, \ y=\mathcal{Y}+y_0, \ z=\mathcal{Z}+z_0$. L'équation de la surface s'écrit alors avec des polynômes homogènes Φ_i de degré i

en x_0, y_0, z_0 :

$$\Phi_3(x_0, y_0, z_0) + \Phi_2(x_0, y_0, z_0) + \Phi_1(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Le plan tangent en Ω à la surface a pour équation $\Phi_3(x_0, y_0, z_0) = (b+1)x_0y_0z_0 = 0$. On change à nouveau de repère en l'utilisant pour poser

$$x_1 = x_0, \ y_1 = y_0, \ z_1 = ((b+1)\mathcal{Y}\mathcal{Z} - 2\mathcal{X} - u)x_0 - 2\varepsilon_2\mathcal{Y}y_0 - 2\varepsilon_1\mathcal{Z}z_0.$$

L'équation de la surface s'écrit avec des polynômes Ψ_i de degré i en x_1, y_1, z_1 :

$$\Psi_3(x_1, y_1, z_1) + \Psi_2(x_1, y_1, z_1) + \Psi_1(x_1, y_1, z_1) = 0.$$

Avec une droite d'équation $z_1=0$ et $x_1=\lambda y_1$ passant par le point double Ω du plan tangent, et coupant donc la surface en un troisième point dont les coordonnées sont calculables, on obtient une représentation en λ et μ en remplaçant $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$, par leurs expressions en fonction de μ et en réduisant les formules qui en résultent. Ceci donne une représentation birationnelle à deux paramètres λ et μ de la surface $M^{s_1s_2}(b,\partial K,u)$ qui est donc ([329] p. 422) une surface réelle rationnelle de dimension de Kodaira $\kappa = -1$. Il en découle la possibilité de la comparer à un plan projectif réel construit sur les deux variables λ et μ . Cette représentation dégénère en celle utilisée par H. Cohn dans l'article [148] et due à R. Fricke [270] pour le cas de la théorie de Markoff classique. On trouve dans [40] des références pour obtenir d'autres représentations rationnelles des surfaces $M^{s_1s_2}(b,\partial K,u)$. Elles donnent la possibilité de décrire l'ensemble des points rationnels $E(\mathbb{Q})$ des courbes elliptiques E que l'on introduit à l'intersection de la surface cubique avec un plan d'équation rationnelle. Ces points sont paramétrés au moyen de λ et μ vérifiant une contrainte algébrique supplémentaire en remplaçant y et z par leurs expressions dans la relation définissant le plan.

4. Perspectives

Le dernier sujet évoqué, où changer de plan revient à déformer la courbe elliptique réelle E avec de temps en temps des sauts quantiques pour les structures algébriques qu'elle porte, reste entièrement à explorer. On a pensé à l'utiliser par pour construire des courbes elliptiques de grand rang. La surface $M^{s_1s_2}(b,\partial K,u)$ est utilisée pour contrôler la géométrie des courbes elliptiques réelle E qu'elle contient. Ces courbes ne sont d'ailleurs pas rationnelles. Elles donnent un bon exemple de la remarque bien connue ([477] p.171) que les sections planes d'une surface rationnelle ne sont pas nécessairement des courbes rationnelles. La méthode suivie a consisté à utiliser la plus petite variété rationnelle contenant une variété algébrique donnée pour étudier cette dernière. Remarquons que l'on peut adapter à la surface $M^{s_1s_2}(b,\partial K,u)$ la construction de la structure de groupe d'une courbe elliptique.

On trouve dans [440] (chapter 1) une approche moderne des surfaces cubiques \mathfrak{X} non singulières montrant comment elles permettent de construire un réseau \mathbb{Z}^7 équipé d'un produit scalaire de signature (1, -6). Ce réseau peut être décrit en terme d'homologie ou de cohomologie. Il est égal à son groupe de classes de diviseurs $Pic(\mathfrak{X})$. Sur de telles surfaces, on peut développer une théorie de Galois avec le groupe de Weyl $W(E_6)$, qui correspond aux permutations de leurs 27 droites dans 45 plans tritangents [329] (p. 405). On met ainsi en évidence pour une telle cubique sur \mathbb{C} un groupe simple à 29520 éléments que l'on peut représenter comme groupe unitaire $U_4(2)$ sur le corps F_4 , comme groupe symplectique $PSp_4(3)$ sur le corps F_3 , comme groupe orthogonal $O_6^-(2)$ sur le corps F_2 [168]. Les surfaces cubiques

sont en particulier des exemples bien connus de surfaces Del Pezzo [329] (p.401). En se limitant au cas réel, la théorie de Galois que l'on vient d'évoquer donne des indications sur les configurations que l'on peut trouver. On trouve dans [373] (chapitres 5 et 6) de magnifiques développements autour de $W(E_6)$. On a un lien évident avec un système de Steiner particulier, le plan projectif d'ordre 2 dit plan de Fano [33] (p.4), certains systèmes réguliers de poids [695] (p. 522), et les algèbres de Lie [475]. Les surfaces réelles $M^{s_1s_2}(b, \partial K, u)$ relèvent de cette approche.

Il est aussi possible d'envisager la transposition de l'article de M. H. Él'-Huti [244]. Des développements comparables à ceux de [515] [516] (p. 89) permettent de calculer le groupe de tous les automorphismes birationnels de la surface cubique $M^{s_1s_2}(b,\partial K,u)$, et de vérifier que son action sur l'ensemble des solutions entières de l'équation diophantienne correspondante est transitive. Le résultat obtenu est essentiellement le même que celui de Èl'-Huti. Il donne une représentation géométrique du groupe \mathbf{T}_3 par le groupe des transformations de la surface engendré par des réflexions par rapport aux points doubles à l'infini \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} . Ce groupe agit transitivement dans l'ensemble des solutions entières de l'équation diophantienne $M^{s_1s_2}(b,\partial K,u)$. Ceci permet de disposer d'une interprétation géométrique expliquant avec le groupe du triangle \mathbf{T}_3 les structures arborescentes que l'on a construites avec les triplets de Cohn.

On peut également caractériser en tant que groupe d'automorphismes birationnels de la surface le groupe engendré par T_3 et le groupe W de tous les automorphismes projectifs de la surface qui sont biréguliers en dehors de l'ensemble des points des côtés du triangle A, B, C. Ceci permet de décrire le groupe de Brauer de la surface $M^{s_1s_2}(b,\partial K,u)$ et d'étudier sur des exemples non triviaux des problèmes comtemporains de géométrie arithmétique [457] [169] [368]. On renvoie à [516] [156] [772] [731] [155] [392] [40] [749] pour la perspective déjà envisagée dans [624] indiquant qu'il n'y a pas de contre exemple au principe de Hasse sur nos équations. Une piste d'étude qui paraît aussi prometteuse [155] (p. 397) est de faire un lien avec les surfaces de Severi-Brauer construites avec la norme d'un corps cubique. Cette construction de F. Châtelet fait jouer un rôle particulier au groupe des permutations de trois éléments, groupe que l'on représente sur nos surfaces par des transformations géométriques permutant les points doubles A, B et C. L'étude du lien avec les surfaces elliptiques ([329] (chapitre V) [740] [272]) est également une piste que l'on voudrait approfondir, en recherchant quel type d'ensemble on doit extraire pour passer d'un type de surface à un autre.

Les autres résultats obtenus ont montré que nos surfaces ont un lien étroit avec des réseaux complets des corps quadratiques, raison pour laquelle on pense qu'elles ne donnent pas de contre-exemple au principe de Hasse. Différentes perspectives ont été identifiées, dont celle de relier arbres et ordres. L'interprétation locale sur nos surfaces cubiques de tous ces résultats est possible. Une autre idée est d'éclairer la réflexion sur les grandes conjectures non encore résolues sur les courbes elliptiques [845]. On peut passer des corps quadratiques à des corps plus généraux et chercher à transposer ce qui précède.

CHAPITRE 4

Approche analytique

1. Introduction

La théorie de Markoff classique, notamment dans la présentation de Harvey Cohn [143], est liée à la géométrie de certains tores percés conformes et à leurs géodésiques. La question qui s'est posée a été de savoir s'il en est de même de la généralisation que l'on a mise au point précédemment. Ce problème a été résolu. Pour le faire on a caractérisé d'abord les tores percés, puis on a fait le lien avec les matrices mises en évidence dans les calculs des chapitres précédents. Ceci est possible grâce à une équation généralisant celle de Markoff à tout tore percé conforme. Elle justifie a posteriori le bien fondé du choix des équations $M^{s_1s_2}(b,\partial K,u)$ que l'on a mises en avant. Les définitions utilisées pour la géométrie hyperbolique sont classiques et issues de [632]. On a pu à partir de là effectuer une classification des tores percés conformes construits sur un même tore percé topologique. L'originalité de ce qui suit réside essentiellement dans le traitement rigoureux des tores percés paraboliques. Il confirme que ces tores sont donnés par l'équation de la théorie de Markoff classique. Le fait que l'on caractérise réellement ainsi tous les groupes de Fricke a été énoncé il y a longtemps ([273] [681] [418]), mais les nombreuses démonstrations qui existent dans la littérature présentent des lacunes ([293] p. 3), ce qui ne semble pas le cas de notre approche. On donne dans la suite un exemple d'énoncé que l'on est obligé de prendre avec une grande prudence. Le contre-exemple que l'on a donné dans le cas d'un tore percé hyperbolique a montré qu'il est associé à un groupe non libre semble complètement nouveau. Et le lien découvert avec une problématique de géométrie algébrique donne une perspective de compréhension commune pour les deux cas précédents. Elle relie le groupe de matrices que l'on considère à un groupe de diviseurs d'une surface. Ceci a permis d'élaborer le point de vue analytique de la théorie dont le point de vue algébrique a été esquissé au chapitre précédent [732]. Le texte qui suit développe l'approche qui a conduit à ces résultats. Ils ont été présentés lors de conférences faites en 1996-1997 à une école thématique du CNRS [622] et à l'Institut des Matériaux du Mans [471].

2. Construction de tores percés conformes

Les tores percés étudiés sont construits à partir du demi-plan de Poincaré \mathcal{H} . On indexe de façon naturelle chacun d'eux par des n-uplets de nombres réels. Ces nombres sont liés par des relations qui les organisent en un nouvel objet géométrique \mathcal{V} . On construit donc un ensemble de surfaces de Riemann $(\mathcal{H}/\Gamma_s)_{s\in\mathcal{V}}$, des tores percés dont le support topologique est le même, mais dont la géométrie est décrite d'une façon particulière en chaque point de l'objet $s\in\mathcal{V}$. Cette approche, qui revient à paramétrer des structures de surfaces de Riemann différentes existantes

sur un même objet topologique, est celle de la théorie de Teichmüller [419] [380] [720] [578]. On l'a développée sur les tores percés en évoquant le problème du choix de l'objet \mathcal{V} le plus pertinent et des variables que l'on peut cacher en raisonnant à équivalence conforme ou isométrique près de \mathcal{H} .

2.1. Les deux matrices d'un tore percé conforme. Pour construire un tore percé \mathcal{T}^{\bullet} par extraction d'un point, on utilise quatre géodésiques de \mathcal{H} notées $\alpha s, s\beta, \beta p, p\alpha$, ne se coupant pas, et dont les extrémités α, s, β, p , sont situées sur la droite réelle qui constitue le bord de \mathcal{H} . Elles délimitent un domaine quadrangulaire de \mathcal{H} . On convient que les sommets α, s, β, p , apparaissent dans cet ordre lorsque l'on décrit ce bord de $-\infty$ à $+\infty$. Il s'agit de nombres réels. Mais on suppose que p peut éventuellement prendre une valeur infinie. En effet les points $-\infty$ et $+\infty$ du bord de \mathcal{H} sont confondus au seul point à l'infini ∞ , compactifiant ce bord en une droite projective $\mathcal{S}^1 = \mathbf{P}^1(\mathbb{R})$. Ce bord compactifie \mathcal{H} lui-même d'une certaine façon, sous forme d'une demi-sphère fermée (ou d'un disque fermé). Pour retrouver le tore percé à partir de là, on identifie deux à deux les géodésiques précédentes par des transformations

$$t_A: \alpha p \to s\beta, \ t_B: \alpha s \to p\beta.$$

Ceci revient à construire le tore en collant grâce à t_A et t_B les bords du domaine quadrangulaire défini ci dessus. Dans cette opération, le point extrait du tore correspond aux quatre points α , s, β , p, qui sont identifiés par t_A ou t_B . Ils n'ont pas d'image dans l'objet construit car ils sont situés au bord de \mathcal{H} et non dans \mathcal{H} .

Pour conserver un maximum de propriétés géométriques, et pas seulement les propriétés topologiques sous jacentes, les transformations t_A et t_B doivent être des isométries de $\mathcal H$ pour sa métrique habituelle. Si on veut qu'elles conservent aussi l'orientation et les angles, elles doivent être des transformations conformes t_A et t_B données par des matrices A et B de $SL(2,\mathbb R)$. Avec les extrémités des géodésiques, les matrices A et B remplissent des conditions qui permettent de les calculer en fonction des nombres α , s, β , p:

PROPOSITION 2.1. A une conjugaison près par une matrice M de $SL(2,\mathbb{R})$, on a la représentation paramétrique suivante pour les matrices A et B définissant un tore percé conforme, construites dans $SL(2,\mathbb{R})$ avec $\alpha < 0$ et $\beta > 0$:

$$\begin{split} A &= \left[\begin{array}{cc} c\beta & -c\alpha\beta \\ c & (1/c\beta) - c\alpha \end{array} \right] \ o\grave{u} \ c \neq 0, \\ B &= \left[\begin{array}{cc} c'\alpha & -c'\alpha\beta \\ c' & (1/c'\alpha) - c'\beta \end{array} \right] \ o\grave{u} \ c' \neq 0. \end{split}$$

De telles matrices sont associées aux valeurs $\alpha < 0$, s = 0, $\beta > 0$, et $p = \infty$, du bord de \mathcal{H} , qu'elles transforment comme suit :

$$A(\alpha) = s$$
, $A(p) = \beta$, $B(\beta) = s$, $B(p) = \alpha$.

Elles donnent pour les géodésiques associées de H

$$A(\alpha p) = s\beta$$
, $B(\alpha s) = p\beta$.

Les expressions données pour A et B dans cette proposition résultent du calcul de leur déterminant qui vaut 1. Raisonner à équivalence conforme près de \mathcal{H} a permis de cacher deux paramètres. Ceux qui restent définissent un objet géométrique réel \mathcal{V} de dimension 4 grâce auquel on indexe toutes les possibilités de couples (A, B). A équivalence conforme près de \mathcal{H} , on indexe toutes les possibilités de tores percés

conformes avec les paramètres conservés $(\alpha, \beta, c, c') \in \mathcal{V}$. L'objet géométrique \mathcal{V} est défini par les contraintes

$$\alpha < 0, \ \beta > 0, \ c \neq 0, \ c' \neq 0.$$

2.2. Le groupe fuchsien d'un tore percé conforme. Ayant identifié deux matrices A et B par le résultat précédent, on considére dans $SL(2,\mathbb{R})$ le groupe qu'elles engendrent G=gp(A,B). Son image par le morphisme canonique ψ de $SL(2,\mathbb{R})$ dans $PSL(2,\mathbb{R})$ est notée

$$\Gamma = PG = Pgp(A, B) = G/G \cap \{\pm \mathbf{1}_2\} = gp(\psi(A), \psi(B)) = gp(a, b).$$

Ce groupe de transformations conformes agit sur le demi-plan de Poincaré \mathcal{H} . Au quotient, on trouve un tore percé par extraction d'un point $\mathcal{T}_{\Gamma}^{\bullet} = \mathcal{H}/\Gamma$. En transportant la métrique de \mathcal{H} sur ce quotient, la projection $\mathcal{H} \to \mathcal{T}_{\Gamma}^{\bullet}$ devient une application conforme. On dit que A et B sont les matrices du tore percé conforme $\mathcal{T}_{\Gamma}^{\bullet}$ et que le groupe $\Gamma = gp(A, B)$ est un groupe fuchsien définissant $\mathcal{T}_{\Gamma}^{\bullet}$. Evidemment, un même tore percé $\mathcal{T}_{\Gamma}^{\bullet}$ peut correspondre à d'autres couples de générateurs (A, B) de G et à d'autres couples de générateurs (a, b) du groupe Γ .

2.2.1. Notion de groupe de Fricke. La théorie de Markoff classique [143] entre dans le cadre géométrique que l'on vient de présenter avec

$$c = \beta = -c' = -\alpha = 1,$$

$$A = A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = B_0 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ces deux matrices engendrent [511] le sous-groupe normal dérivé du groupe discret $SL(2,\mathbb{Z})$, d'où un groupe fuchsien de $PSL(2,\mathbb{Z})$ isomorphe à \mathbf{F}_2 , le groupe libre de rang 2. Généralisant cet exemple, on dit qu'un groupe fuchsien $\Gamma = PG$ est un groupe de Fricke si et seulement s'il vérifie les deux conditions [681] [700] :

- (1): Le groupe Γ est isomorphe à un groupe libre à deux générateurs $\mathbf{F}_2 = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.
- (2) : La surface de Riemann \mathcal{H}/Γ possède un espace topologique support qui est homéomorphe à un tore topologique percé par extraction d'un point.

Dans le cas général, il n'est pas toujours simple de démontrer que Γ est un groupe fuchsien [293]. Il n'est pas non plus nécessairement facile de montrer que l'on a affaire à un groupe libre [588]. Pour cela, on a besoin de connaître un minimum des propriétés des matrices A et B. Dans la suite on donne un exemple qui montre que certains résultats classiques dans ce domaine [496] [661] sont à appliquer avec prudence. Notre définition même des groupes de Fricke n'est pas la plus communément admise. On trouve par exemple dans [66] une définition des groupes modulaires de Fricke qui englobe celle qui précède. Ces définitions trouvent leur origine dans l'ouvrage [273].

2.2.2. Image inverse. Notons a et b les deux générateurs du sous-groupe fuchsien Γ de $PSL(2,\mathbb{R})$, et soient A et B deux images inverses respectives de a et b. On peut considérer en remontant à $SL(2,\mathbb{R})$ quatre sous-groupes à deux générateurs d'image Γ dans $PSL(2,\mathbb{R})$ par la projection canonique ψ

$$gp(A, B), gp(-A, B), gp(A, -B), gp(-A, -B).$$

Les points correspondants α , s=0, β , $p=\infty$, définis par chacun des groupes précédents sont identiques. En considérant les quatre possibilités précédentes, on

dit que gp(A, B) est le groupe principal défini par Γ si et seulement si on a

$$tr(A) \ge 0, \ tr(B) \ge 0.$$

On dit que les trois autres groupes gp(-A,B), gp(A,-B), gp(-A,-B), sont les groupes conjugués de gp(A,B). La remontée d'un groupe $\Gamma \subset PSL(2,\mathbb{R})$ en un groupe $G \subset SL(2,\mathbb{R})$ dont Γ est l'image est étudiée dans [446]. On a :

PROPOSITION 2.2. Le groupe principal gp(A, B) défini par un groupe de Fricke $\Gamma = gp(a, b)$ est libre. La projection canonique ψ telle que $\psi(A) = a$ et $\psi(B) = b$ est un isomorphisme de gp(A, B) sur gp(a, b). Pour les groupes conjugués on a aussi des isomorphismes

$$\psi: gp(A, -B) \simeq \Gamma, \ \psi: gp(-A, B) \simeq \Gamma, \ \psi: gp(-A, -B) \simeq \Gamma.$$

Enfin, on a pour l'opposé de la matrice unité

$$-\mathbf{1}_{2} \notin gp(A, B), -\mathbf{1}_{2} \notin gp(A, -B), -\mathbf{1}_{2} \notin gp(-A, B), -\mathbf{1}_{2} \notin gp(-A, -B).$$

2.3. Hyperbolicité des deux matrices d'un tore percé. Avec l'expression calculée la matrice A et de B, on a facilement [408] :

Proposition 2.3. Les matrices A et B d'un tore percé $\mathcal{T}_{\Gamma}^{\bullet}$ sont hyperboliques, c'est-à-dire telles que :

Elles possèdent chacune deux points fixes réels non à l'infini sur le bord de \mathcal{H} , et une géodésique invariante qui les relie, son axe. En particulier, pour le groupe principal gp(A,B) d'un tore percé conforme, on a tr(A) > 2, tr(B) > 2.

La position respective des extrémités des axes, les points fixes a^+ , a^- , b^+ , b^- , de A et B, n'est pas indifférente, ou ce qui revient au même le fait que les axes de A et B se coupent dans \mathcal{H} . Ces deux axes ne peuvent d'ailleurs être identiques que si l'on a $c'^2\alpha = c^2\beta$. Or les signes de α et β garantissent que cette égalité n'est jamais assurée. L'introduction un birapport permet de retrouver un résultat connu :

Proposition 2.4. Avec les deux conditions $\alpha < 0$ et $\beta > 0$ et les expressions données pour A et B, les axes de ces deux matrices hyperboliques sont toujours distincts. Ils ne se coupent que si et seulement si on a la condition

$$0 > [a^+, a^-; b^+, b^-] = \frac{(b^+ - a^+)}{(b^+ - a^-)} \times \frac{(b^- - a^-)}{(b^- - a^+)}.$$

Celle-ci est équivalente au fait que tout intervalle du bord de \mathcal{H} contenant deux points fixes de l'une des transformations A ou B contient aussi un point fixe de l'autre.

Les définitions du birapport ("rapport de rapport" plutôt que "cross product") sont diverses selon les auteurs. Notre définition est celle de [791] [744].

2.4. Intervention des commutateurs. On considère le commutateur de A et B, que l'on définit comme suit :

$$L = [A, B] = ABA^{-1}B^{-1}.$$

Il s'agit ici de la définition classique du commutateur donnée par exemple dans [47] [408] et non de celle que l'on trouve dans [85]. On peut le calculer. Il permet de considérer avec [144] une autre matrice C° de G telle que

$$C^{\circ}BA = 1$$
, $ABC^{\circ} = L$.

Le commutateur s'introduit naturellement dans notre contexte parce que l'on a

$$L(s) = ABA^{-1}B^{-1}(s) = ABA^{-1}(\beta) = AB(p) = A(\alpha) = s.$$

PROPOSITION 2.5. Avec les expressions des matrices A et B du tore percé $\mathcal{T}_{\Gamma}^{\bullet}$, le commutateur L = [A, B] est tel que

$$tr(L) = tr([A, B]) \le -2.$$

On dit que [A,B] est une matrice parabolique lorsque tr([A,B])=-2 a lieu. Lorsque l'on a l'inégalité stricte tr([A,B])<-2, on dit qu'elle est hyperbolique. La matrice inverse L^{-1} permet d'introduire une matrice C vérifiant

$$CAB = 1$$
, $BAC = L^{-1} = [B, A] = [A, B]^{-1}$, $tr(L^{-1}) = tr(L)$.

On a aussi un autre commutateur K qui définit le même tore percé que L avec

$$ABC = 1, \quad CBA = K = [B^{-1}, A^{-1}], \quad tr(K) = tr(L),$$

$$BAC^{\circ} = 1, \quad C^{\circ}AB = K^{-1} = [A^{-1}, B^{-1}], \quad tr(K^{-1}) = tr(K),$$

$$K(p) = B^{-1}A^{-1}BA(p) = B^{-1}A^{-1}B(\beta) = B^{-1}A^{-1}(s) = B^{-1}(\alpha) = p.$$

Pour les traces des matrices que l'on vient de considérer, il est facile d'établir :

Proposition 2.6. On a

$$tr(C) = tr(C^{\circ}),$$

$$tr(L) = tr(L^{-1}) = tr(K) = tr(K^{-1}) \le -2,$$

$$tr(L) + 2 = tr(A)^2 + tr(B)^2 + tr(AB)^2 - tr(A)tr(B)tr(AB) \le 0.$$

La dernière égalité de cette proposition est due à Fricke. Elle introduit un nombre qui est utilisé dans la suite

$$\sigma = tr(A)^2 + tr(B)^2 + tr(AB)^2 - tr(A)tr(B)tr(AB).$$

- **2.5.** Tores percés paraboliques et hyperboliques. La dernière proposition identifie deux cas pour K et L (comparer à [850]). Illustrons avec K
- Si tr(K) = -2, on a $c^2\beta = -c'^2\alpha$, et les matrices K et L sont paraboliques. La matrice K se simplifie

$$K = \left[\begin{array}{cc} -1 & 2(1-c^2\alpha\beta-c'^2\alpha\beta)/(c'^2\alpha) \\ 0 & -1 \end{array} \right].$$

Elle donne une transformation parabolique du demi-plan de Poincaré \mathcal{H} . Son unique point fixe est $p=\infty$. Il permet de définir un tore associé unique $\mathcal{T}_{\Gamma}^{\bullet}$ grâce aux matrices A et B. Cette transformation ne laisse aucune géodésique de \mathcal{H} invariante. Elle correspond à une translation parallèlement à l'axe réel. On dit que $\mathcal{T}_{\Gamma}^{\bullet}$ est un tore percé conforme parabolique.

• Si tr(K) < -2, les matrices K et L sont hyperboliques. K laisse invariante une géodésique de \mathcal{H} , l'axe de K, qui avec $c^2\beta + c'^2\alpha \neq 0$ est la géodésique des points z = x + iy de \mathcal{H} vérifiant

$$x = \frac{(c^2 \alpha \beta + c'^2 \alpha \beta - 1)}{(c^2 \beta + c'^2 \alpha)}.$$

Elle possède deux points fixes sur le bord de \mathcal{H} : le point à l'infini $p=\infty$ et l'intersection p' de cette géodésique avec le bord de \mathcal{H} . Le point à l'infini p permet de définir un tore associé $\mathcal{T}_{\Gamma}^{\bullet}$ avec les points $B(p)=\alpha$, $A(\alpha)=B(\beta)=s$, $A(p)=\beta$. On dit que $\mathcal{T}_{\Gamma}^{\bullet}$ est un tore percé conforme hyperbolique. Dans ce cas, il est possible de s'assurer que la géodésique pp' invariante dans \mathcal{H} par K donne dans $\mathcal{T}_{\Gamma}^{\bullet}$ une géodésique fermée entourant la piqûre. En extrayant alors le disque piqué ayant cette géodésique pour bord, on fabrique une nouvelle surface trouée $\mathcal{T}_{\Gamma}^{\circ}$. Dans \mathcal{H} , on peut représenter le domaine fondamental correspondant à l'image réciproque de $\mathcal{T}_{\Gamma}^{\circ}$. On peut vérifier qu'il est stable par le groupe gp(A,B). Tout se passe comme si la surface $\mathcal{T}_{\Gamma}^{\bullet}$ prolongeait $\mathcal{T}_{\Gamma}^{\circ}$ de façon à réduire le trou à une piqûre. Les deux objets $\mathcal{T}_{\Gamma}^{\bullet}$ ont même support topologique, mais pas même support conforme.

Le fait remarquable dans ce cas est que le tore percé hyperbolique est dédoublé grâce à l'autre extrémité p' de la géodésique invariante par K et aux points qui s'en déduisent avec $B(p') = \alpha'$, $A(\alpha') = B(\beta') = s'$, $A(p') = \beta'$. Ce second tore est distinct du tore précédent. Lorsque $c^2\beta + c'^2\alpha$ tend vers 0, on constate que p' tend vers $p = \infty$, s' vers s = 0, α' vers α , β' vers β . Le tore percé devient parabolique mais double à la limite. Ceci illustre le phénomène du double de Schottky d'une surface de Riemann non compacte ([149] p.235).

2.6. Une représentation à trois paramètres. Ayant paramétré tous les tores percés conformes avec un objet géométrique \mathcal{V} de dimension 4, on voit maintenant comment trouver d'autres paramétrisations de tous ces tores par un objet géométrique différent de \mathcal{V} . On privilégie les nombres :

$$\lambda = c'\alpha, \quad \mu = c\beta,$$

$$\theta_{\alpha} = -c'^{2}\alpha = -c'\lambda > 0, \quad \theta_{\beta} = c^{2}\beta = c\mu > 0, \quad \Theta = (\theta_{\alpha}/\theta_{\beta}) > 0,$$

$$M = tr(AB)^{2} - tr([A, B]) - 2 = tr(AB)^{2} - \sigma,$$

$$M_{2} = tr(A)tr(AB) - tr(B) + \Theta tr(B),$$

$$M_{1} = tr(B)tr(AB) - tr(A) + \Theta^{-1}tr(A).$$

On obtient:

$$\lambda = (M_2/M), \ \mu = (M_1/M).$$

Les expressions de tr(A), tr(B), tr(AB) donnent maintenant :

$$\begin{split} M^2 + M_1^2 + \Theta^{-1} M_2^2 &= tr(A) M M_1, \\ M^2 + \Theta M_1^2 + M_2^2 &= tr(B) M M_2, \\ M^2 + \Theta M_1^2 + \Theta^{-1} M_2^2 &= tr(AB) M_1 M_2. \end{split}$$

Les trois relations précédentes ont une solution commune en Θ pourvu que l'on ait :

$$M^2 + M_1^2 + M_2^2 = tr(A)MM_1 + tr(B)MM_2 - tr(AB)M_1M_2.$$

Lorsque la valeur de Θ est différente de 1, on trouve, avec $\varepsilon = \pm 1$:

$$\mu = \frac{-(2tr(B)tr(AB) - tr(A)\sigma) + \varepsilon tr(A)\sqrt{\sigma^2 - 4\sigma}}{2(\sigma - tr(AB)^2)},$$

$$\lambda = \frac{-(2tr(A)tr(AB) - tr(B)\sigma) - \varepsilon tr(B)\sqrt{\sigma^2 - 4\sigma}}{2(\sigma - tr(AB)^2)}.$$

Ces expressions n'ont un sens qu'à condition d'avoir un argument positif dans les radicaux. Comme par construction λ et μ sont réels et existent bien, cette condition est assurée. Le cas parabolique où tr([A,B])=-2 se singularise en annulant le terme $\sigma^2-4\sigma$. Ceci simplifie les expressions de λ et μ .

Si l'on revient aux expressions des matrices A et B, on observe qu'elles sont totalement déterminées par les trois nombres réels tr(A), tr(B), tr(AB), à un paramètre réel près cependant, que l'on peut supposer ici être θ_{α} . La question naturelle qui se pose est donc de savoir ce qui lie des couples de matrices (A,B) correspondant aux mêmes traces, mais à des valeurs θ_{α} distinctes. Considérons donc de tels couples (A,B) et (A',B'). Avec s=0 et $p=\infty$, on a par construction :

$$\alpha = -\frac{\lambda^2}{\theta_{\alpha}}, \ \beta = \frac{\mu^2 \Theta}{\theta_{\alpha}}.$$

Ceci donne le birapport suivant

$$[\alpha, \beta; s, p] = -\frac{1}{\Theta} (\frac{\lambda}{\mu})^2.$$

Le même raisonnement fait pour (A', B') conduit au même birapport. Sur la droite projective constituant le bord de \mathcal{H} , on met ainsi en évidence deux quadruplets de points ayant même birapport. Il en découle selon un résultat connu([**269**] p. 248, [**672**] p. 76) l'existence d'une homographie h de $PGL(2, \mathbb{R}) = GL(2, \mathbb{R})/(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ les échangeant. Elle permet la construction d'une transformation conforme de \mathcal{H} autorisant à se limiter à $\theta_{\alpha} = 1$ et à énoncer :

PROPOSITION 2.7. A une conjugaison près par une matrice de $SL(2,\mathbb{R})$, on a la représentation paramétrique suivante à trois paramètres pour les matrices A et B du tore percé $\mathcal{T}_{\Gamma}^{\bullet}$

$$A = \left[\begin{array}{cc} \mu & (\mu \lambda^2) \\ (1/\Theta \mu) & ((1+(\lambda^2/\Theta))/\mu) \end{array} \right], \quad B = \left[\begin{array}{cc} \lambda & -(\lambda \mu^2 \Theta) \\ -(1/\lambda) & ((1+\Theta \mu^2)/\lambda \end{array} \right].$$

La donnée des trois paramètres $\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$, $\Theta > 0$, détermine les matrices A, B, et AB, et donc leurs traces selon les expressions

$$tr(A) = ((1 + (\lambda^2/\Theta) + \mu^2)/\mu),$$

$$tr(B) = ((1 + \lambda^2 + \Theta\mu^2)/\lambda),$$

$$tr(AB) = ((1 + (\lambda^2/\Theta) + \Theta\mu^2)/\lambda\mu).$$

Ces valeurs vérifient les conditions supplémentaires

$$1+\lambda^2+\mu^2=tr(A)\mu+tr(B)\lambda-tr(AB)\lambda\mu,$$

$$\alpha=-\lambda^2,\ s=0,\ \beta=\mu^2\Theta,\ p=\infty.$$

Inversement, les trois paramètres intervenant dans ces matrices ne dépendent que des trois valeurs tr(A), tr(B), tr(AB), et d'un signe, avec les expressions

$$\lambda = \frac{-(2tr(A)tr(AB) - tr(B)\sigma) - \varepsilon tr(B)\sqrt{\sigma^2 - 4\sigma}}{2(\sigma - tr(AB)^2)} \neq 0,$$

$$\mu = \frac{-(2tr(B)tr(AB) - tr(A)\sigma) + \varepsilon tr(A)\sqrt{\sigma^2 - 4\sigma}}{2(\sigma - tr(AB)^2)} \neq 0,$$

$$\Theta = \frac{2tr(A)^2 + 2tr(B)^2 - tr(B)^2\sigma + \varepsilon tr(B)^2\sqrt{\sigma^2 - 4\sigma}}{2tr(A)^2 + 2tr(B)^2 - tr(A)^2\sigma - \varepsilon tr(A)^2\sqrt{\sigma^2 - 4\sigma}} > 0,$$

où l'on a

$$\varepsilon = \pm 1$$
, $\sigma = tr(A)^2 + tr(B)^2 + tr(AB)^2 - tr(A)tr(B)tr(AB) \le 0$.

De plus on a équivalence des trois propriétés suivantes :

$$tr(L) = -2, \ \sigma = 0, \ \Theta = 1.$$

Les expressions données pour A et B dans cette proposition n'utilisent que trois paramètres parce qu'on a caché θ_{α} en raisonnant à une transformation conforme de \mathcal{H} près. Les paramètres qui restent définissent un objet géométrique \mathcal{V}' qui est réel de dimension 3. Il indexe avec des paramètres $(\lambda, \mu, \Theta) \in \mathcal{V}'$ les couples (A, B) correspondants, et donc les différentes possibilités pour les classes de tores percés conformes. L'espace \mathcal{V}' est défini par les contraintes $\lambda \neq 0, \ \mu \neq 0, \ \Theta > 0$. Raisonnant sur $\Gamma = Pgp(A, B)$ on peut se limiter à $\lambda > 0, \ \mu > 0, \ \Theta > 0$.

2.7. Autre représentation à quatre paramètres. Dans le résultat qui précède, on a introduit une dissymétrie dans les rôles joués par θ_{α} et θ_{β} . En rétablissant la symétrie entre θ_{α} et θ_{β} on a obtenu :

PROPOSITION 2.8. A une conjugaison près par une matrice de $SL(2,\mathbb{R})$, on a la représentation paramétrique suivante à quatre paramètres pour les matrices A et B du tore percé conforme $\mathcal{T}_{\Gamma}^{\bullet}$

$$\begin{split} A &= \left[\begin{array}{cc} \mu & (\mu \lambda^2/\Theta_\alpha) \\ (\Theta_\beta/\mu) & ((1+(\Theta_\beta/\Theta_\alpha)\lambda^2)/\mu) \end{array} \right], \\ B &= \left[\begin{array}{cc} \lambda & -(\lambda \mu^2/\Theta_\beta) \\ -(\Theta_\alpha/\lambda) & ((1+(\Theta_\alpha/\Theta_\beta)\mu^2)/\lambda) \end{array} \right]. \end{split}$$

Les paramètres intervenant dans ces expressions ne dépendent que des trois valeurs tr(A), tr(B), tr(AB), et d'une valeur $\varepsilon = \pm 1$:

$$\begin{split} \sigma &= tr(A)^2 + tr(B)^2 + tr(AB)^2 - tr(A)tr(B)tr(AB) \leq 0, \\ \lambda &= \frac{-(2tr(A)tr(AB) - tr(B)\sigma) - \varepsilon tr(B)\sqrt{\sigma^2 - 4\sigma}}{2(\sigma - tr(AB)^2)} \neq 0, \\ \mu &= \frac{-(2tr(B)tr(AB) - tr(A)\sigma) + \varepsilon tr(A)\sqrt{\sigma^2 - 4\sigma}}{2(\sigma - tr(AB)^2)} \neq 0, \\ \Theta_{\alpha} &= 2tr(A)^2 + 2tr(B)^2 - tr(B)^2\sigma + \varepsilon tr(B)^2\sqrt{\sigma^2 - 4\sigma} > 0, \\ \Theta_{\beta} &= 2tr(A)^2 + 2tr(B)^2 - tr(A)^2\sigma - \varepsilon tr(A)^2\sqrt{\sigma^2 - 4\sigma} > 0. \\ \alpha &= -(\lambda^2/\Theta_{\alpha}), \quad s = 0, \quad \beta = (\mu^2/\Theta_{\beta}), \quad p = \infty. \end{split}$$

A une conjugaison près définie par une dilatation d'amplitude τ^2 telle que

$$\theta_{\alpha} = \Theta_{\alpha} \tau^2, \ \theta_{\beta} = \Theta_{\beta} \tau^2,$$

on retrouve les expressions paramétriques antérieures

$$A = \left[\begin{array}{cc} \mu & (\mu \lambda^2/\theta_\alpha) \\ (\theta_\beta/\mu) & ((1+(\theta_\beta/\theta_\alpha)\lambda^2)/\mu) \end{array} \right], \quad B = \left[\begin{array}{cc} \lambda & -(\lambda \mu^2/\theta_\beta) \\ -(\theta_\alpha/\lambda) & ((1+(\theta_\alpha/\theta_\beta)\mu^2)/\lambda) \end{array} \right].$$

A une conjugaison près définie par une dilatation d'amplitude Θ_{α} , on retrouve aussi les expressions déjà vues avec le paramètre $\Theta = (\Theta_{\alpha}/\Theta_{\beta})$.

Cette proposition peut être interprétée avec un nouvel objet géométrique \mathcal{V}'' de dimension 4 permettant de paramétrer tous les tores percés conformes d'une nouvelle façon. On utilise ici des quadruplets $(tr(B), tr(A), tr(BA), \varepsilon) \in \mathcal{V}''$ l'objet \mathcal{V}'' est défini par $\varepsilon = \pm 1$ et la condition

$$tr(A)^{2} + tr(B)^{2} + tr(AB)^{2} - tr(A)tr(B)tr(AB) \le 0.$$

Le bord de \mathcal{V}'' correspondant à la condition $\sigma=0$ ne donne que des tores percés conformes paraboliques. Dans ce cas d'ailleurs, les tores percés associés à $\varepsilon=1$ et $\varepsilon=-1$ sont identiques. Ce bord peut donc être paramétré en oubliant ε , uniquement par des triplets (tr(B), tr(A), tr(BA)) vérifiant l'équation de Markoff classique :

$$tr(A)^{2} + tr(B)^{2} + tr(AB)^{2} - tr(A)tr(B)tr(AB) = 0.$$

On a montré dans [629] que dans ce cas le groupe G = gp(A, B) est un groupe libre à deux générateurs \mathbf{F}_2 s'il est contenu dans $GL(2, \mathbb{Z})$. Il détermine un groupe de Fricke Pgp(A, B) engendré par les classes de A et B. La suite montre comment l'équation de Markoff paramétrise en fait tous les groupes de Fricke par des points du bord de \mathcal{V}'' . Ceci revient à dire que pour un tore percé conforme les propiétés d'être de Fricke ou parabolique sont équivalentes [273] [681].

On conjecture que les groupes correspondant aux tores percés conformes hyperboliques ont, en dehors du bord de \mathcal{V}'' , deux générateurs A et B qui sont liés. Construire les relations les liant est un problème essentiel dont les conséquences pourraient être importantes. On donne dans la suite un exemple où l'on a réussi à le faire. Cet exemple illustre notre conjecture.

2.8. Rôle des transformations anti-conformes. Dans la proposition qui précède, on voudrait pouvoir se limiter dans tous les cas à une paramétrisation des tores percés par des triplets (tr(B), tr(A), tr(BA)), et donc se passer également du terme ε pour les tores percés conformes hyperboliques. C'est possible si on ne raisonne qu'à isométrie près de \mathcal{H} , c'est-à-dire en faisant agir aussi ses transformations anti-conformes. Pour le voir il a suffi d'expliquer ce qui différencie les deux cas $\varepsilon = +1$ et $\varepsilon = -1$ correspondant à un même triplet (tr(A), tr(B), tr(AB)). Ceci a permis d'énoncer :

PROPOSITION 2.9. Pour les deux couples de matrices (A^+, B^+) et (B^-, A^-) correspondant à un même triplet de traces tel que $\sigma < 0$ ainsi que respectivement à $\varepsilon = 1$ et $\varepsilon = -1$, il existe une matrice $D \in S^*L(2, \mathbb{R})$ telle que

$$B^- = DA^+D^{-1}$$
, $A^- = DB^+D^{-1}$, $\det(D) = -1$.

La matrice D définit une transformation anti-conforme $\psi(D) = h_+^-$ du demi-plan de Poincaré $\mathcal H$ dans lui-même qui transforme les géodésiques comme suit (en inversant les sens de parcours) :

$$\alpha^{+} p \to p \beta^{-}, \quad \alpha^{+} s \to s \beta^{-}, \quad s \beta^{+} \to \alpha^{-} s, \quad p \beta^{+} \to \alpha^{-} p;$$

$$h_{+}^{-}(\alpha^{+}) = \beta^{-}, \quad h_{+}^{-}(\beta^{+}) = \alpha^{-}, \quad h_{+}^{-}(s) = s, \quad h_{+}^{-}(p) = p;$$

$$h_{+}^{-}(z) = (\frac{\alpha^{-}}{\beta^{+}}) \overline{z} = (\frac{\beta^{-}}{\alpha^{+}}) \overline{z}.$$

Elle donne pour les divers paramètres intervenant

$$(tr(A^+), tr(B^+), tr(A^+B^+)) = (tr(B^-), tr(A^-), tr(A^-B^-)),$$
$$(\lambda^+, \mu^+, \Theta^+) = (\mu^-, \lambda^-, (1/\Theta^-)),$$

$$[\alpha^+, \beta^+; s, p] = [\beta^-, \alpha^-; s, p],$$

$$\alpha^- = -(\Theta^+_{\beta}/\Theta^-_{\alpha})\beta^+ = -(\Theta^+_{\alpha}/\Theta^-_{\beta})\beta^+,$$

$$\beta^- = -(\Theta^+_{\alpha}/\Theta^-_{\beta})\alpha^+ = -(\Theta^+_{\beta}/\Theta^-_{\alpha})\alpha^+.$$

Ce résultat permet de se limiter au cas $\varepsilon=1$ dans les calculs courants faits autour des tores percés, lorsque l'on raisonne à isométrie près de \mathcal{H} . Il est intéressant de se demander ce que donne la proposition précédente lorsque σ tend vers 0. On trouve à la limite un tore percé conforme parabolique où s=0 et $p=\infty$. Ceci explique comment tout tore percé conforme parabolique est anti-conformément équivalent à lui-même. Dans les autres cas, la dernière proposition correspond aux observations qui ont été faites précédemment sur le dédoublement des tores percés hyperboliques (et les doubles de Schottky d'une surface de Riemann non compacte [149] p.235). Une transformation anti-conforme lie les deux tores percés obtenus.

3. Signification géométrique de nos équations

3.1. Cône attaché à un tore percé. Revenant sur les nombres M, M_1, M_2 , qui ont été introduits précédemment, on a obtenu :

Proposition 3.1. Soient A et B les matrices d'un tore percé conforme $\mathcal{T}_{\Gamma}^{\bullet}$ quelconque. Avec les expressions connues où $\varepsilon = \pm 1$

$$\sigma = tr(A)^{2} + tr(B)^{2} + tr(AB)^{2} - tr(A)tr(B)tr(AB),$$

$$\Theta = \frac{2tr(A)^{2} + 2tr(B)^{2} - tr(B)^{2}\sigma + \varepsilon tr(B)^{2}\sqrt{\sigma^{2} - 4\sigma}}{2tr(A)^{2} + 2tr(B)^{2} - tr(A)^{2}\sigma - \varepsilon tr(A)^{2}\sqrt{\sigma^{2} - 4\sigma}},$$

$$M_{1} = tr(B)tr(AB) - tr(A) + \Theta^{-1}tr(A),$$

$$M_{2} = tr(A)tr(AB) - tr(B) + \Theta tr(B),$$

$$M = tr(AB)^{2} - \sigma,$$

on a la relation (FR^*) suivante :

$$M^2 + M_1^2 + M_2^2 = tr(A)MM_1 + tr(B)MM_2 - tr(AB)M_1M_2.$$

L'équation (FR^*) définit une quadrique en M, M_1 , M_2 , qui est un cône en ces paramètres directement donné par la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{tr(A)}{2} & -\frac{tr(B)}{2} \\ -\frac{tr(A)}{2} & 1 & \frac{tr(AB)}{2} \\ -\frac{tr(B)}{2} & \frac{tr(AB)}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

On dit que c'est le cône (FR^*) associé au couple de générateurs (A,B) du groupe gp(A,B) du tore percé $\mathcal{T}_{\Gamma}^{\bullet}$ que l'on considère. Le déterminant de la matrice qui le définit vaut

$$1 - \frac{1}{4}(tr(A)^2 + tr(B)^2 + tr(AB)^2 - tr(A)tr(B)tr(AB)) = \frac{4 - \sigma}{4} \ge 1.$$

Pour le tore percé conforme associé, on peut considérer que la relation (FR^*) est une bonne généralisation de l'équation de Markoff classique [522]. En effet, si $\Theta = 1$, soit $\sigma = 0$, elle se simplifie par un facteur $tr(AB)^2$ en

$$tr(A)^{2} + tr(B)^{2} + tr(AB)^{2} = tr(A)tr(B)tr(AB).$$

- **3.2. Lien avec nos équations** $M^{s_1s_2}(b, \partial K, u)$. Il est apparu que l'équation (FR^*) correspond aux équations qui ont été étudiées dans ce qui précède.
- 3.2.1. Une équation équivalente. On a fait apparaître dans [630] une équation équivalente à $M^{s_1s_2}(b,\partial K,u)$. On appelle M(b,r,s,t) cette nouvelle équation :

$$x^{2} + y^{2} + z^{2} = (b+1)xyz + ryz + szx + txy,$$

où

$$r = \varepsilon_1 K_1 - \varepsilon_2 K_2, \ s = -(\varepsilon_1 k_1 + k_{12}), \ t = \varepsilon_2 k_2 + k_{21}.$$

Le lien s'effectue avec l'équation $M^{s_1s_2}(b,\partial K,u)$ grâce aux deux égalités suivantes

$$\varepsilon_1 m_2 = K_1 m_1 - k_1 m, \ \varepsilon_2 m_1 = k_2 m - K_2 m_2.$$

3.2.2. Mise en évidence du tore percé et du cône. Dans le cas le plus général pour établir l'équation $M^{s_1s_2}(b,\partial K,u)$ on a vu que l'on pouvait utiliser une formule de Fricke pour calculer la trace du commutateur $[A_b,B_c]=A_bB_cA_b^{-1}B_c^{-1}$ où

$$A_b = M_{(\triangleleft X_2^*,b)} = \begin{bmatrix} bm_2 + k_{21} & m_2 \\ bk_2 + l_2 & k_2 \end{bmatrix},$$

$$B_c = M_{(X_1^* \triangleright, c)} = \begin{bmatrix} (c+1)m_1 - k_1 & m_1 \\ (c+1)(m_1 - k_{12}) - (k_1 - l_1) & m_1 - k_{12} \end{bmatrix},$$

Ceci définit t, s, r, par un simple calcul de traces. De façon à disposer de matrices appartenant à $SL(2,\mathbb{R})$ on fait l'hypothèse que l'on a

$$\det(A_h) = \det(B_c) = \det(A_h B_c) = 1 = \varepsilon_1 = \varepsilon_2.$$

L'équation équivalente M(b, r, s, t) prend alors la forme :

$$m^2 + m_1^2 + m_2^2 = tr(A_b)mm_1 + tr(B_c)mm_2 - tr(A_bB_c)m_1m_2.$$

On reconnaît l'équation (FR^*) du cône qui a été associée à un tore percé conforme. Ce tore est déduit du groupe $gp(A_b, B_c)$ avec :

$$L(s) = A_b B_c A_b^{-1} B_c^{-1}(s) = s, \quad \alpha = A_b^{-1}(s), \quad p = B_c^{-1}(\alpha), \quad \beta = A_b(p).$$

Dans le cas parabolique, on trouve avec ces conditions un tore percé unique. C'est le cas de la théorie de Markoff classique. Dans le cas hyperbolique qui est le cas le plus fréquent, on identifie ainsi deux tores percés.

3.2.3. Un exemple de tore percé hyperbolique. On a détaillé un exemple hyperbolique qui correspond à l'équation $M^{++}(3,0,1)$. Les matrices à considérer sont dans $SL(2,\mathbb{Z})$:

$$A = \begin{bmatrix} 11 & 3 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} = M_{(1,1,1,3)}, \quad B = \begin{bmatrix} 37 & 11 \\ 10 & 3 \end{bmatrix} = M_{(3,1,2,3)}.$$

On peut calculer les deux tores percés conformes. L'un est donné par les points

$$s_{+} = \frac{4363 + \sqrt{3122285}}{1658} = [3, \underline{1, 2, 3, 3, 3, 3, 2, 1}] \approx 3,697225,$$

$$\beta_{+} = \frac{1477 + \sqrt{3122285}}{982} = [3, 3, 3, 2, 1, 1, 2, 3] \approx 3,303461,$$

$$p_{+} = \frac{-44517 - \sqrt{3122285}}{155578} = [-1, 1, 2, 2, 1, \underline{3, 3, 2, 1, 1, 2, 3, 3}] \approx -2,297497,$$

$$\alpha_{+} = \frac{1477 - \sqrt{3122285}}{982} = [-1, 1, 2, \underline{2, 1, 1, 2, 3, 3, 3, 3}] \approx -0,295315.$$

Le second tore est donné par les points

$$s_{-} = \frac{4363 - \sqrt{3122285}}{1658} = [1, 1, 1, \underline{3}, 3, 3, 3, 2, 1, 1, 2] \approx 1,565743,$$

$$\beta_{-} = \frac{1477 - \sqrt{3122285}}{982} = [-1, 1, 2, \underline{2}, 1, 1, 2, 3, 3, 3, 3] \approx -0,295315,$$

$$p_{-} = \frac{-44517 + \sqrt{3122285}}{155578} = [-1, 1, 2, 1, 1, 1, \underline{3}, 3, 3, 2, 1, 1, 2, 3] \approx -0,274782,$$

$$\alpha_{-} = \frac{1477 + \sqrt{3122285}}{982} = [\underline{3}, 3, 3, 2, 1, 1, 2, 3] \approx 3,303461.$$

Un point remarquable est que dans ce cas on a

$$\beta_+ = \alpha_-, \ \beta_- = \alpha_+,$$

d'où deux matrices $U = B^{-1}A = -A^{-1}B$ et $V = BA^{-1} = -AB^{-1}$ telles que

$$U^2 = V^2 = -\mathbf{1}_2, \ A = -VB = BU, \ B = VA = -AU,$$

$$\beta_+ = U(\beta_-) = V(\beta_-).$$

Dans le groupe $\Gamma = gp(\psi(A), \psi(B))$ on trouve ainsi des relations entre $\psi(A)$ et $\psi(B)$. Elles établissent que ce groupe n'est pas libre. Ce n'est donc pas un groupe de Fricke, même si par construction la surface de Riemann \mathcal{H}/Γ est homéomorphe à un tore percé. Les points fixes de A et B sont respectivement

$$a^{+} = -[\underline{\triangleleft X_{2}^{*}, a}] = -[\underline{1, 1, 1, 3}] = \frac{9 + \sqrt{165}}{14} \approx 1,5604,$$

$$a^{-} = -[0, \underline{X_{2} \triangleright, a}] = -[0, \underline{1, 1, 1, 3}] = \frac{9 - \sqrt{165}}{6} \approx -0,6409,$$

$$b^{+} = -[\underline{X_{1}^{*} \triangleright, a}] = -[\underline{3, 1, 2, 3}] = \frac{34 + \sqrt{1586}}{20} \approx 3,6912,$$

$$b^{-} = -[0, \underline{\triangleleft X_{1}, a}] = -[0, \underline{2, 1, 3, 3}] = \frac{32 - \sqrt{1586}}{22} \approx -0,3557.$$

Leurs axes respectifs se coupent donc. D'autre part, un calcul simple montre que s_+ et s_- sont des points fixes réels de la matrice de trace $\sigma - 2 = 1767$

$$L = ABA^{-1}B^{-1} = \begin{bmatrix} -1298 & 4799 \\ -829 & 3065 \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}).$$

Cet exemple est intéressant car il est en contradiction avec un théorème établi par R.C. Lyndon et J.L. Ullman [496] (p. 164) qui permettrait dans ce cas de conclure que le groupe $gp(\psi(A), \psi(B))$ est libre. Le constat que cet article présente au moins deux difficultés a déjà été fait dans l'article [661] (pp. 213-214). Il est confirmé.

L'équation (FR^*) du cône est locale et change pour chaque point (m, m_1, m_2) de la surface cubique $M^{++}(3,0,1)$. Au point (130,11,3) elle s'écrit :

$$x^{2} + y^{2} + z^{2} = tr(A)xy + tr(B)zx - tr(AB)yz = 13xy + 40xz - 520yz.$$

Equivalente avec $15m_2 - 4m_1 = 1$ à $M^{++}(3,0,1)$, elle donne aussi l'équation M(b,r,s,t) qui s'écrit :

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4xyz - 15xz + 4xy.$$

3.2.4. Une piste d'approfondissement. L'exemple précédent permet de comprendre le lien de la surface cubique avec le groupe fuchsien $\Gamma = gp(\psi(A), \psi(B))$. Pour prolonger la réflexion on a trouvé des indications dans [735] (Tome 1, chapitre III 1.6 p. 164). Avec la représentation paramétrique généralisant celle de Fricke qui a été construite au chapitre précédent, on déduit une application régulière de la surface dans le plan projectif et surtout un pinceau non dégénéré de coniques. On peut alors faire apparaître dans cette situation un groupe abélien libre [735] (Tome 1, chapitre III 1.6, théorème 4) à partir duquel on peut espérer reconstruire les matrices 2×2 que l'on considère. Dans une telle interprétation qui reste à détailler complètement, on matérialise le groupe des classes de diviseurs de la surface en chaque point entier (m, m_1, m_2) en utilisant une application s du plan projectif \mathbf{P}^1 dans la surface définissant la courbe $S = s(\mathbf{P}^1)$ et une fibre non singulière F dont on déduit le groupe gp(A, B). Ceci donne une nouvelle piste pour approfondir la situation que l'on considère, en la rattachant à une problématique importante de géométrie algébrique.

4. Théorie complète pour les tores percés paraboliques

Dans le cas des tores percés paraboliques on peut réduire encore le nombre des paramètres. On a vu précédemment que ce cas est celui des groupes de Fricke et qu'il existe un lien direct avec l'équation de Markoff classique. Ceci permet de développer une théorie complète de la réduction pour ces tores percés [681]. Elle généralise ce qui a été construit dans [629] pour la théorie de Markoff classique, ou dans le chapitre 2 pour la résolution de nos équations par descente infinie.

4.1. Représentations à deux paramètres. En supposant que gp(A, B) est un groupe principal, on peut supposer λ et μ positifs. Seules deux valeurs suffisent alors à définir les matrices A et B dans le cas parabolique. On a ainsi énoncé :

PROPOSITION 4.1. Pour un tore percé conforme parabolique $\mathcal{T}_{\Gamma}^{\bullet}$, on a à une conjugaison près par une matrice de $SL(2,\mathbb{R})$, la représentation paramétrique suivante pour les matrices A et B du groupe principal de $\mathcal{T}_{\Gamma}^{\bullet}$

$$A = \left[\begin{array}{cc} \mu & (\mu \lambda^2/\Theta_\alpha) \\ (\Theta_\alpha/\mu) & ((1+\lambda^2)/\mu) \end{array} \right], \quad B = \left[\begin{array}{cc} \lambda & -(\lambda \mu^2/\Theta_\alpha) \\ -(\Theta_\alpha/\lambda) & ((1+\mu^2)/\lambda) \end{array} \right],$$

avec

$$\Theta_{\alpha} = 2(tr(A)^2 + tr(B)^2), \quad \alpha = -(\lambda^2/\Theta_{\alpha}), \quad s = 0, \quad \beta = (\mu^2/\Theta_{\alpha}), \quad p = \infty.$$

Ceci donne la représentation paramétrique suivante des traces

$$tr(A) = \frac{1 + \lambda^2 + \mu^2}{\mu}, \ tr(B) = \frac{1 + \lambda^2 + \mu^2}{\lambda}, \ tr(AB) = \frac{1 + \lambda^2 + \mu^2}{\lambda \mu},$$

où

$$\lambda = (tr(A)/tr(AB)) > 0, \ \mu = (tr(B)/tr(AB)) > 0.$$

Ce cas est caractérisé par la relation de Fricke

$$tr(A)^2 + tr(B)^2 + tr(AB)^2 = tr(A)tr(B)tr(AB).$$

Cette relation signifie que la représentation paramétrique précédente de $\mathcal{T}_{\Gamma}^{\bullet}$ est à deux paramètres λ et μ . A une dilatation d'amplitude $\tau = \Theta_{\alpha}^{-1}$ près, on peut faire disparaître le paramètre Θ_{α} des écritures précédentes en raisonnant à une transformation conforme près. Les deux matrices à considérer prennent alors la forme

$$A = \left[\begin{array}{cc} \mu & \mu \lambda^2 \\ (1/\mu) & ((1+\lambda^2)/\mu) \end{array} \right], \quad B = \left[\begin{array}{cc} \lambda & -\lambda \mu^2 \\ -(1/\lambda) & ((1+\mu^2)/\lambda) \end{array} \right].$$

Le groupe Pgp(A, B) qu'elles définissent est un groupe de Fricke. Et gp(A, B) est un groupe libre à deux générateurs isomorphe à \mathbf{F}_2 .

Cette proposition peut être interprétée avec un objet géométrique \mathcal{V}''' qui est une surface de Riemann d'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = xyz.$$

Chaque point (x, y, z) = (tr(B), tr(A), tr(AB)) de \mathcal{V}''' définit un couple (λ, μ) permettant la donnée d'un tore percé conforme parabolique $\mathcal{T}^{\bullet}_{gp(\psi(A),\psi(B))}$. La paramétrisation des matrices en λ et μ est due à Fricke [270] [148]. De plus tous les tores percés paraboliques sont ainsi obtenus avec les couples $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

L'énoncé véritablement nouveau de cette proposition est celui qui affiche que le groupe fuchsien $gp(\psi(A), \psi(B)) = Pgp(A, B)$ est toujours un groupe de Fricke. On utilise pour le démontrer le théorème 8 (p. 221) de [661] avec

$$tr(A) > 2$$
, $tr(B) > 2$, $tr(L) = tr(ABA^{-1}B^{-1}) = -2$.

On peut calculer les points fixes a^+, a^-, b^+, b^- , de A et B en fonction de λ , μ , et s'assurer du signe négatif de $[a^+, a^-; b^+, b^-]$. Ayant ainsi vérifié toutes les conditions de théorème cité on l'applique pour conclure que le groupe gp(A,B) est discret et libre à deux générateurs tout comme Pgp(A,B). Comme par construction la surface de Riemann $\mathcal{H}/Pgp(A,B)$ est homéomorphe à un tore percé en un point, il en résulte que Pgp(A,B) est un groupe de Fricke. Comme la réciproque se déduit aisément de [629] en montrant que les traces sont liées par une équation de Markoff classique, cette propriété est bien caractéristique du cas parabolique. De plus on a donné précédemment un exemple hyperbolique où cette propriété n'est pas assurée. En d'autres termes on a obtenu une équivalence entre la catégorie des groupes de Fricke et celle des tores percés conformes paraboliques.

- **4.2. Des exemples de tores percés paraboliques.** Différents exemples de groupes de Fricke associés à des tores percés conformes paraboliques sont bien connus.
 - Le lien avec les travaux de A. Schmidt [700] introduit

$$\mathbf{A}_0 = tr(AB), \ \mathbf{B}_0 = tr(A), \ \mathbf{C}_0 = tr(B), \ k = (1 + \lambda^2 + \mu^2)/\theta,$$

$$T_0 = BA, \ U_0 = A, \ V_0 = B^{-1}.$$

Ceci donne une nouvelle représentation paramétrique (voir [632]) précisant comment A et B agissent sur les bords du domaine fondamental $p\alpha s\beta$.

$$A = \pm \left[\begin{array}{cc} \sqrt{\beta \theta} & -\alpha \sqrt{\beta \theta} \\ \sqrt{\theta/\beta} & ((1-\alpha\theta)/\sqrt{\beta \theta}) \end{array} \right], \ B = \pm \left[\begin{array}{cc} \sqrt{-\alpha\theta} & -\beta \sqrt{-\alpha\theta} \\ -\sqrt{(\theta/-\alpha)} & ((1-\beta\theta)/\sqrt{-\alpha\theta}) \end{array} \right].$$

Les travaux de A. Schmidt [700] introduisent une notion de groupe de Fricke étendu dont un groupe de Fricke est un sous groupe d'indice 2. Un tel groupe étendu n'est autre qu'un groupe isomorphe au groupe du triangle \mathbf{T}_3 dans lequel l'indice 2 définit de façon unique le groupe de Fricke. Le groupe étendu correspond à une sphère triplement percée dont le tore percé est un revêtement à deux feuilles. On peut prolonger ces repésentations de \mathbf{F}_2 et \mathbf{T}_3 en une représentation de $GL(2, \mathbb{Z})$.

• Presque toutes les matrices $A \in SL(2,\mathbb{R})$ permettent de trouver une matrice B avec laquelle gp(A,B) détermine un tore percé conforme parabolique :

Proposition 4.2. Considérons une matrice à coefficients réels

$$A=\pm\left[\begin{array}{cc}\mathbf{a}&\mathbf{b}\\\mathbf{c}&\mathbf{d}\end{array}\right]\in SL(2,\mathbb{R}),\ o\grave{u}\ \mathbf{bc}>0,\ \mathbf{ba}>0,\ \mathbf{ac}>0,$$

 $alors\ A\ d\'etermine\ un\ tore\ perc\'e\ conforme\ parabolique\ avec$

$$B = \pm \begin{bmatrix} \sqrt{\mathbf{b}\mathbf{c}} & -\mathbf{a}\sqrt{\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{c}}} \\ -\mathbf{a}\sqrt{\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{b}}} & \frac{(1+\mathbf{a}^2)}{\sqrt{\mathbf{b}\mathbf{c}}} \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{R}).$$

Le groupe gp(A, B) est libre à deux générateurs.

Cette proposition donne des exemples classiques [147] [700] [724]:

• Le groupe de Klein est défini avec $\lambda = 1, \, \mu = \theta = 2$. Il est déterminé par A:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

• Le groupe de la théorie de Markoff, qui est en réalité le groupe libre \mathbf{F}_2 , est défini avec $\lambda = \mu = \theta = 1$. Il est déterminé par la seule donnée de la matrice A_0 :

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, B_0 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Il est possible de voir que ce cas se ramène au précédent.

• Le groupe de Hecke est défini avec $\lambda = \mu = \sqrt{2}$, $\theta = 1$. Il est déterminé par :

$$A = \left[\begin{array}{cc} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/4 \\ \sqrt{2} & 3\sqrt{2}/2 \end{array} \right], \ \ B = \left[\begin{array}{cc} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/4 \\ -\sqrt{2} & 3\sqrt{2}/2 \end{array} \right].$$

• Le groupe G_{θ} est engendré par les matrices suivantes où $\theta > 0$

$$A_{\theta} = \begin{bmatrix} \mu & (\mu \lambda^2/\theta) \\ (\theta/\mu) & ((1+\lambda^2)/\mu) \end{bmatrix}, \quad B_{\theta} = \begin{bmatrix} \lambda & -(\lambda \mu^2/\theta) \\ -(\theta/\lambda) & ((1+\mu^2)/\lambda) \end{bmatrix}.$$

Il est conformément équivalent au groupe G_1 donné avec $\theta=1$ par :

$$D_{\theta} = \frac{1}{\sqrt{\theta}} \begin{bmatrix} \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A_1 = D_{\theta} A_{\theta} D_{\theta}^{-1}, B_1 = D_{\theta} B_{\theta} D_{\theta}^{-1}.$$

On en déduit l'expression de la matrice de passage d'un groupe G_{θ} à tout autre groupe $G_{\theta'}$. Si l'on note respectivement $\mathcal{T}^{\bullet}_{\Gamma_{\theta}}$ et $\mathcal{T}^{\bullet}_{\Gamma_{\theta'}}$ les tores percés conformes associés, ils sont conformément équivalents lorsque θ et θ' sont de même signe, et anti-conformément équivalents dans le cas contraire.

4.3. Classification des groupes de Fricke par les triplets de traces. Avec un formalisme sur les traces analogue à celui de [629] on a trouvé :

Proposition 4.3. Soient (A, B) et (A', B') les systèmes de générateurs respectifs de deux groupes principaux de groupes de Fricke Γ et Γ' associés à des tores percés conformes paraboliques, on a équivalence des propriétés suivantes :

1/ Les couples (A, B) et (A', B') sont équivalents par un même automorphisme intérieur de $GL(2, \mathbb{R})$:

$$A = DA'D^{-1}, B = DB'D^{-1}, \text{ où } D \in GL(2, \mathbb{R}).$$

2/ On a égalité des deux triplets suivants

$$\Pi(A,B) = (tr(B^{-1}), tr(A), tr(B^{-1}A^{-1})),$$

$$\Pi(A',B') = (tr(B'^{-1}), tr(A'), tr(B'^{-1}A'^{-1})).$$

3/ Les couples (A, B) et (A', B') définissent les mêmes paramètres $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^+$

$$\lambda = (tr(A)/tr(AB)) = (tr(A')/tr(A'B')),$$

 $\mu = (tr(B)/tr(AB)) = (tr(B')/tr(A'B')).$

De façon évidente, on a $1/\Rightarrow 2/\Rightarrow 3/$. Le plus délicat est d'établir l'implication $3/\Rightarrow 1/$. On le fait avec une méthode géométrique directe basée sur la comparaison de birapports. Il en résulte l'existence d'une homographie de la droite réelle projective sur le bord de \mathcal{H} , et donc d'une matrice $D\in GL(2,\mathbb{R})$ associée à cette homographie. La matrice D est explicitement calculable, et on vérifie qu'elle satisfait à la condition 1/. Ceci termine la démonstration en explicitant la transformation de Möbius de \mathcal{H} recherchée. De plus on a pu s'assurer que l'on a :

PROPOSITION 4.4. Toute équivalence conforme d'un tore percé parabolique $\mathcal{T}_{\Gamma}^{\bullet}$ dans lui-même donnée par une conjugaison de $GL(2,\mathbb{R})$ est égale à l'identité.

- **4.4. Réduction des tores percés paraboliques.** Ayant classé les tores percés paraboliques au moyen des transformations conformes de \mathcal{H} , on a examiné ce que l'on peut faire sans changer de groupe, mais en changeant seulement de système de générateurs (A, B). Ceci permet de contruire une théorie de la réduction dans tout groupe de Fricke.
- 4.4.1. Les involutions. Le groupe $\Gamma = Pgp(A, B)$ est un groupe de Fricke pour tout tore percé parabolique $\mathcal{T}_{\Gamma}^{\bullet}$, et le goupe gp(A, B) est libre à deux générateurs A et B. On applique les automorphismes involutifs du groupe gp(A, B) dont les expressions sont issues de la théorie de Markoff classique [629]:

$$X_{\phi}: (A,B) \longrightarrow (A^{-1},ABA),$$

 $Y_{\phi}: (A,B) \longrightarrow (BAB,B^{-1}),$
 $Z_{\phi}: (A,B) \longrightarrow (A^{-1},B).$

Leur action sur le triplet des traces $(x, y, z) = (tr(B^{-1}), tr(A), tr(B^{-1}A^{-1}))$ est :

$$\widetilde{X_{\phi}}: (x,y,z) \longrightarrow (yz-x,y,z),$$

$$\widetilde{Y_{\phi}}: (x,y,z) \longrightarrow (x,xz-y,z),$$

$$\widetilde{Z_{\phi}}: (x,y,z) \longrightarrow (x,y,xy-z).$$

Ces transformations laissent invariante la relation $x^2 + y^2 + z^2 = xyz$.

4.4.2. Nappe principale et groupe principal. La dernière équation citée est celle d'une surface réelle possédant un point double (0,0,0) et quatre nappes se déduisant de la nappe principale définie par les conditions $x>0, \quad y>0, \quad z>0.$ La nappe principale est invariante par les transformations \widetilde{X}_{ϕ} , \widetilde{Y}_{ϕ} , \widetilde{Z}_{ϕ} . On passe d'une nappe aux autres par des transformations évidentes. Elles peuvent ne pas laisser le groupe qp(A,B) invariant. Comme on raisonne sur un tore percé parabolique, on a recours aux deux paramètres $\lambda = (tr(A)/tr(AB))$ et $\mu = (tr(B)/tr(AB))$. Pour la nappe principale, on a $\lambda > 0$ et $\mu > 0$, c'est à dire des valeurs dans le premier quart de plan réel. Pour les autres couples matrices dont les paramètres sont dans un des autres quarts de plan, on note les paramètres correspondants $\varepsilon_{\lambda}\lambda$ et $\varepsilon_{\mu}\mu$, avec $\lambda > 0$ et $\mu > 0$, ε_{λ} et ε_{μ} dans $\{+1, -1\}$. Ceux-ci déterminent des couples de matrices que l'on peut écrire $(\varepsilon_{\mu}A, \varepsilon_{\lambda}B)$. Les groupes $gp(\varepsilon_{\mu}A, \varepsilon_{\lambda}B)$ et gp(A, B)peuvent être différents, mais les groupes de transformations associés sont identiques et déterminent même groupe de Fricke. Tous donnent les mêmes points α , s=0, β , $p = \infty$. On peut donc se limiter à considérer le groupe principal gp(A, B), avec les conditions $\lambda > 0$ et $\mu > 0$ caractérisant la nappe principale. Les autres sont ses groupes conjugués.

La remontée d'un groupe $\Gamma \subset PSL(2,\mathbb{R})$ à un groupe $G \subset SL(2,\mathbb{R})$ dont Γ est l'image est étudiée dans [446]. Le groupe Γ se remonte en G si et seulement s'il n'a pas d'élément d'ordre 2. Dans le cas parabolique, il n'y pas de difficulté.

4.4.3. La réduction. Le processus de réduction peut être transposé facilement du groupe principal à tout groupe conjugué. Sur le groupe principal gp(A, B) on construit algorithmiquement une suite des transformations $\widetilde{X_{\phi}}$, $\widetilde{Y_{\phi}}$, $\widetilde{Z_{\phi}}$, de façon à réduire tout système de générateurs (A, B). Considérons que ce système définisse avec le triplet de traces associé sur la nappe principale les quatre nombres

$$m = \max(x, y, z) > 0,$$

$$m_x = \max(yz - x, y, z) > 0,$$

$$m_y = \max(x, xz - y, z) > 0,$$

$$m_z = \max(x, y, xy - z) > 0.$$

On dit que le triplet (x,y,z) n'est pas réduit si et seulement si l'un des nombres m_x , m_y , m_z , est strictement plus petit que m. On s'assure facilement que pour tout triplet non réduit, deux des nombres m_x , m_y , m_z , sont plus grands que m, le troisième étant plus petit que m. Ceci permet de choisir une unique involution parmi \widetilde{X}_{ϕ} , \widetilde{Y}_{ϕ} , \widetilde{Z}_{ϕ} , avec laquelle on construit un nouveau triplet (x_1,y_1,z_1) tel que la valeur $m_1 = \max(x_1,y_1,z_1)$ soit strictement plus petite que m. On poursuit en renouvelant le procédé à partir de ce dernier triplet, développant un processus de descente infinie analogue à celui que l'on a utilisé pour résoudre nos équations. Il est facile de vérifier que l'algorithme s'arrête sur un triplet réduit. Ceci donne :

Proposition 4.5. Tout groupe principal du groupe de Fricke Γ associé à un tore percé conforme parabolique $\mathcal{T}_{\Gamma}^{\bullet}$ possède un système de générateurs réduit.

L'action des involutions $\widetilde{X_{\phi}}$, $\widetilde{Y_{\phi}}$, $\widetilde{Z_{\phi}}$, se traduit sur les paramètres λ et μ grâce à des involutions définissant une action de \mathbf{T}_3 sur le quart de plan :

$$\mathbf{X}_{\phi}: (\lambda, \mu) \longrightarrow (\lambda, \frac{1+\lambda^2}{\mu}).$$

$$\mathbf{Y}_{\phi}: (\lambda, \mu) \longrightarrow (\frac{1+\mu^2}{\lambda}, \mu),$$
$$\mathbf{Z}_{\phi}: (\lambda, \mu) \longrightarrow (\frac{\lambda}{\lambda^2 + \mu^2}, \frac{\mu}{\lambda^2 + \mu^2}).$$

On fait alors apparaître un intéressant pavage d'un quart de plan réel par un triangle curviligne, pavage du à une action du groupe du triangle \mathbf{T}_3 . Les points invariants par \mathbf{X}_{ϕ} dans le quart de plan qui correspond à la nappe principale sont portés par une hyperbole H_X d'équation $\mu^2 - \lambda^2 = 1$. Ceux qui sont invariants par \mathbf{Y}_{ϕ} sont portés par l'hyperbole H_Y d'équation $\lambda^2 - \mu^2 = 1$. Les points invariants par \mathbf{Z}_{ϕ} sont portés par le cercle H_Z d'équation $\lambda^2 + \mu^2 = 1$. Ces trois courbes déterminent un triangle curviligne de sommets $\mathbf{L}(1,0)$, $\mathbf{M}(0,1)$, $\mathbf{N}(\infty,\infty)$ qui constitue un domaine fondamental pour l'action sur le quart de plan du groupe \mathbf{T}_3 .

 $4.4.4.\ La\ super-réduction.$ Dans le triangle curviligne \mathbf{LMN} lui-même, on a la condition

$$\mu^2 \le 1 + \lambda^2.$$

Mais on peut échanger le rôle des matrices A et B sans changer de groupe, c'est-à dire permuter λ et μ . On obtient $\lambda \leq \mu$ avec cette transformation

$$P_1:(A,B)\longrightarrow (B,A).$$

On obtient aussi $1 \leq \lambda$ avec la transformation suivante

$$P_2: (A,B) \longrightarrow (A,B^{-1}A^{-1}).$$

On dit qu'un système de générateurs (A, B) du groupe principal associé à un tore percé parabolique $\mathcal{T}^{\bullet}_{\Gamma}$ est super-réduit si et seulement si on a les conditions

$$1 \le \lambda \le \mu, \ \mu^2 \le 1 + \lambda^2.$$

Ce qui précède permet d'énoncer :

Proposition 4.6. Tout groupe principal du groupe de Fricke Γ associé à un tore percé conforme parabolique $\mathcal{T}_{\Gamma}^{\bullet}$ possède un système de générateurs super-réduit.

- 4.4.5. Exemple des tores percés de Klein et de Hecke. On peut illustrer ce que donne l'algorithme sur les exemples connus de groupes de Fricke [147].
- Tore de Klein : Ce cas a été donné avec $\lambda=1, \, \mu=\theta=2$, qui ne respectent pas la condition de super-réduction. Le triplet correspondant est (x,y,z)=(6,3,3). Il donne $m=6, \, m_x=3, \, m_y=15, \, m_z=15$. On identifie ainsi la transformation \mathbf{X}_{ϕ} qui conduit à calculer les matrices suivantes :

$$A = \left[\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{array} \right], \ B = \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{array} \right].$$

On a alors (x, y, z) = (3, 3, 3) et $m = 3 < m_x = m_y = m_z = 6$. On est cette fois dans le triangle curviligne **LMN** avec les valeurs $\lambda = \mu = 1$. On voit alors que l'on se ramène simplement au groupe de la théorie de Markoff, où $B = A_0$ et $A = B_0$. Avec $\lambda = \mu = 1$ on est alors dans le cas d'un système super-réduit de générateurs du groupe principal considéré.

• Tore de Hecke: Ce cas a été évoqué avec les valeurs $\lambda = \mu = \sqrt{2}/2$ et $\theta = 1$. Ces valeurs ne respectent pas la condition de super-réduction. On se trouve cette fois dans le triangle curviligne **LMN**. Le triplet correspondant est maintenant $(x, y, z) = (2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 4)$. Il correspond aux valeurs m = 4, $m_x = m_y = 2\sqrt{2}$,

 $m_z = 4$. On n'identifie ainsi aucune transformation applicable \mathbf{X}_{ϕ} , \mathbf{Y}_{ϕ} , \mathbf{Z}_{ϕ} . Par contre on peut appliquer P_2 qui donne les matrices suivantes correspondant aux valeurs $\lambda = 1$ et $\mu = \sqrt{2}$:

$$A = \left[\begin{array}{cc} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/4 \\ \sqrt{2} & 3\sqrt{2}/2 \end{array} \right], \ \ B = \left[\begin{array}{cc} 4 & -(1/2) \\ 2 & 0 \end{array} \right].$$

4.5. Module d'un tore percé conforme parabolique. On dit que deux tores percés conformes paraboliques sont de même type si et seulement s'il existe une équivalence conforme transformant l'un en l'autre. L'algorithme de réduction permet de remplacer le couple de générateurs (A,B) d'un groupe de Fricke grâce aux involutions $X_{\phi}, Y_{\phi}, Z_{\phi}$. Il ne change pas le tore percé conforme sur lequel on travaille. En combinant les deux méthodes, on associe aux différents types de tores percés conformes paraboliques avec les calculs qui précèdent un nombre réel (μ^2/λ^2) , le module du tore percé que l'on considère. Les conditions de super-réduction garantissent que l'on peut se ramener à

$$1 \le \frac{\mu^2}{\lambda^2} \le 2.$$

Ceci a permis d'énoncer :

Proposition 4.7. Tous les types de tores percés conformes paraboliques sont associés à un nombre réel positif (μ^2/λ^2) compris entre 1 et 2, le module du tore percé conforme parabolique considéré. La valeur 1 correspond à un tore percé de Klein. La valeur 2 correspond à un tore percé de Hecke. Toute valeur comprise entre 1 et 2 correspond à un tore percé conforme.

Cette proposition classe à l'aide de leur module les tores percés conformes paraboliques que l'on peut construire sur un même tore percé topologique. Deux tores percés conformes correspondants à des modules (μ^2/λ^2) différents ne peuvent être de même type. A l'inverse, deux tores correspondants à un même module (μ^2/λ^2) peuvent ne pas être de même type. Considérons pour le voir

$$\mu' = \kappa \mu, \ \lambda' = \kappa \lambda, \ \kappa \neq 0.$$

Sauf le cas où $\kappa=1$, les quadruplets (α,s,β,p) et (α',s',β',p') se déduisent par une homographie sans que celle-ci permette de conclure à des relations convenables entre les matrices associées A,B et A',B'. Les traces seules permettent de garantir que l'on a affaire à des tores paraboliques conformément équivalents. Par exemple le tore de la théorie de Markoff est donné avec $\lambda=\mu=1$, mais il n'est pas conformément équivalent à celui que l'on obtient avec $\kappa=2$ et les matrices

$$A' = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ (1/2) & (5/2) \end{bmatrix}, \ B' = \begin{bmatrix} 2 & -8 \\ -(1/2) & (5/2) \end{bmatrix},$$

car les triplets de traces associés comprennent un rationnel non entier qui rend impossible de trouver $M \in SL(2,\mathbb{Z})$ telle que $A' = M^{-1}A_0M$ et $B' = M^{-1}B_0M$. Les exemples de ce genre ont été étudiés dans [143] où des indications sont données sur la valeur des constantes de Markoff correspondantes, mais la théorie développée par cet auteur est moins complète que la nôtre. Les deux tores percés de l'exemple que l'on vient de donner ne sont pas conformément équivalents, alors qu'ils sont de même module égal à 1 par hypothèse. Cette situation ne se reproduit pas dans le cas particulier du tore de Hecke qui est de module 2. Considérons en effet les inégalités qui le définissent, elles imposent $\lambda = 1$ et $\mu = \sqrt{2}$. Elles caractérisent

de façon unique le type conforme du tore de Hecke. En fait, se donner un couple (λ, μ) avec les contraintes trouvées antérieurement est équivalent à se donner un couple $((\mu^2/\lambda^2), \lambda)$, c'est-à-dire plus que le seul module (μ^2/λ^2) , avec cette fois les contraintes

$$1 \le \lambda \le \frac{1}{\sqrt{(\mu^2/\lambda^2) - 1}}.$$

La fixation du module (μ^2/λ^2) permet de se ramener à un même domaine fondamental $p=\infty, \alpha=-1, s=0, \beta=(\mu^2/\lambda^2)$. Mais le facteur supplémentaire λ est en plus nécessaire pour décrire alors la façon dont les bords de ce domaine sont identifiés par A et B, ce que l'on a pu décrire géométriquement dans [632]. On retrouve ainsi le fait que le type conforme d'un tore percé conforme parabolique nécessite deux paramètres pour être bien défini, ainsi que le fait que les tores de Hecke sont définis à transformation conforme près de \mathcal{H} par leur seul module.

La théorie de la réduction que l'on a développée n'est pas celle de [409] qui correspond plutôt à un codage des géodésiques fermées d'un quotient \mathcal{H}/Γ où Γ groupe fuchsien.

4.6. Apparition des quaternions. On considère une matrice $B \in SL(2, \mathbb{R})$ telle que $tr(B) = ((1 + \lambda^2 + \mu^2)/\lambda)$. Avec le groupe G_1 introduit précédemment, $B_1 \in G_1$ et la condition $BD = DB_1$ où

$$B_1 = \begin{bmatrix} \lambda & -(\lambda \mu^2) \\ -(1/\lambda) & ((1+\mu^2)/\lambda) \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{y} \\ \mathbf{z} & \mathbf{t} \end{bmatrix}, \det(D) = \pm 1,$$

on a obtenu:

PROPOSITION 4.8. Si $B \in SL(2,\mathbb{R})$, on a équivalence des deux propriétés : $1/\operatorname{tr}(B) = ((1+\lambda^2+\mu^2)/\lambda)$.

$$2/$$
 Il existe $D \in GL(2,\mathbb{R})$ telle que $B = DB_1D^{-1}$ où

$$B_1 = \left[\begin{array}{cc} \lambda & -\lambda \mu^2 \\ -(1/\lambda) & ((1+\mu^2)/\lambda) \end{array} \right].$$

Si on combine maintenant cette proposition avec la recherche d'une matrice D' telle que $A = D'A_1D'^{-1}$ et $tr(A) = ((1 + \lambda^2 + \mu^2)/\mu)$, on est conduit à écrire

$$B^{-1}A^{-1} = DB_1^{-1}D^{-1}D'A_1^{-1}D'^{-1}, \quad$$

$$tr(B^{-1}A^{-1}) = tr(B_1^{-1}(D^{-1}D')A_1^{-1}(D^{-1}D')^{-1}) = ((1 + \lambda^2 + \mu^2)/\lambda\mu).$$

Ceci introduit une matrice

$$W = D^{-1}D' = \left[\begin{array}{cc} \varpi_1 & \varpi_4 \\ \varpi_3 & \varpi_2 \end{array} \right],$$

et le calcul effectif de sa trace donne un équation quadratique que l'on peut interpréter comme la norme d'un quaternion. Une solution de cette équation est donnée par $\varpi_1 = \varpi_2 = \pm 1$, $\varpi_3 = \varpi_4 = 0$. Les autres solutions sont calculables et fournissent des quaternions non triviaux que l'on peut utiliser pour donner une caractérisation du couple (A, B) par le triplet de traces

$$\Pi(A,B)=(tr(B^{-1}),tr(A),tr(B^{-1}A^{-1})).$$

5. Perspectives

Dans ce qui précède on a donné une nouvelle interprétation géométrique des équations diophantiennes $M^{s_1s_2}(a,\partial K,u_\theta)$ de notre théorie de Markoff généralisée. Le lien a été fait avec la théorie des tores percés conformes, et on a vu une différence entre le cas parabolique où la généralisation est complète et le cas hyperbolique où les résultats sont plus lacunaires. Pour les tores paraboliques, on dispose d'une théorie de la réduction complète qui classe les triplets de traces sous l'action du groupe du triangle \mathbf{T}_3 . Tous sont issus d'une équation de Markoff classique grâce à la condition

$$tr(A)^{2} + tr(B)^{2} + tr(AB)^{2} - tr(A)tr(B)tr(AB) = \sigma = 0.$$

Ils s'interprètent avec les couples de générateurs du groupe libre non commutatif à deux générateurs \mathbf{F}_2 auquel tout groupe de Fricke est isomorphe [681]. Ce cas généralise de façon complète aux tores percés paraboliques la théorie de Markoff classique. Cette présentation explique les développements que l'on trouve dans [147] et [143] auxquels elle donne une interprétation. Elle explicite les travaux de [700]. On peut compléter ce qui précède par un calcul des constantes de Markoff associées, sachant que les fractions continues ne s'écrivent plus dans ce cas avec des 1 et des 2, mais contiennent d'autres valeurs (voir [143]). Trouver un exemple où la seule valeur supplémentaire est égale à 3 ne paraît pas un défi insurmontable.

Les tores percés conformes hyperboliques sont eux-mêmes donnés par une équation $M^{s_1s_2}(a,\partial K,u_\theta)$ dont on a donné une interprétation géométrique et pour lesquels on a une action du groupe de triangle \mathbf{T}_3 et une réduction associée. On les a également classés à isométrie près de \mathcal{H} avec la condition différente (comparer à [396]):

$$tr(A)^{2} + tr(B)^{2} + tr(AB)^{2} - tr(A)tr(B)tr(AB) = \sigma < 0.$$

Pour que ce classement soit à équivalence conforme près de $\mathcal H$ il faut ajouter une valeur $\varepsilon=\pm 1$ correspondant à l'orientation du tore percé. On a une autre réduction pour les tores σ -hyperboliques ainsi définis. On a vu que le groupe correspondant n'est plus de Fricke. On a donné un exemple où une relation entre générateurs a été calculée, il faut voir si la méthode utilisée est généralisable, et ce que devient la super-réduction. Ceci est examiné au chapitre suivant. Les géodésiques invariantes ont permis de comprendre comment les surfaces de Riemann qui en résultent sont prolongées d'une surface à un trou vers une surface à une piqûre. On a vu comment ce cas recouvre une situation où apparaissent deux tores troués conformes liés entre eux (doubles de Schottky), qui se recouvrent dans le cas parabolique limite. On peut développer une théorie de la réduction pour les tores hyperboliques en prenant soin de travailler simultanément sur les deux tores. Il faudrait aussi voir ce que devient dans le cas hyperbolique le lien avec les quaternions.

L'exemple hyperbolique identifié avec $\sigma = 1769$ concerne les matrices

$$A = \left[\begin{array}{cc} 11 & 3 \\ 7 & 2 \end{array} \right], \ \ B = \left[\begin{array}{cc} 37 & 11 \\ 10 & 3 \end{array} \right], \ \ H = \left[\begin{array}{cc} 3065 & -4799 \\ 829 & -1298 \end{array} \right].$$

Le groupe associé $G=< A,B,H \mid [A,B]H=\mathbf{1}_2>$ n'est pas libre car il contient des éléments particuliers $U=B^{-1}A$ et $V=BA^{-1}$ tels que $U^2=V^2=-\mathbf{1}_2$. La piste d'approfondissement à la géométrie algébrique qui a été signalée dans ce cas autour de [735] (Tome 1, chapitre III 1.6 p. 164) constitue un sujet important à creuser. On a esquissé l'interprétation qui reste à détailler matérialisant le groupe des classes

de diviseurs de nos surfaces cubiques en chaque point entier en utilisant une courbe $S = s(\mathbf{P}^1)$ représentant le plan projectif dans la surface $M^{s_1s_2}(a,\partial K,u_\theta)$ et une fibre non singulière F. Cette approche construit un groupe libre à deux générateurs dont il faut comprendre à quoi il correspond dans le cas hyperbolique. Ce cas pourrait avoir une grande importance pour la classification des fibrés vectoriels [229] [230] [231] [473] [432] [433].

CHAPITRE 5

Généralisation aux surfaces de Riemann

1. Introduction

Les réflexions pour généraliser la théorie de Markoff classique à des situations plus vastes ont conduit à étudier de plus près la géométrie conforme des surfaces de Riemann. Un exposé sur cette question est donné dans [632] où l'on décrit la vision que l'auteur a de ce dernier sujet, et les liens qu'il a formalisés avec des thèmes d'actualité en mathématiques ou en physique. Le résumé qui suit s'appuie sur les exposés classiques sur le sujet ([745] [467] [253] [47] [408] [554] [729] [150] [226] [769] [866] [62] [466] [227] [675] [580] [581] [582]...). Il indique quelques perspectives de recherches que l'auteur a choisi d'explorer. Le point de départ a été d'étendre les travaux présentés précédemment sur les tores percés au cadre plus général des surfaces de Riemann. On a concrétisé cette idée en tentant d'éclairer des problématiques contemporaines. Le chaos quantique est ainsi devenu progressivement une préoccupation essentielle. On a recherché les liens qu'il pouvait avoir avec la théorie de Markoff. En d'autres termes, il s'agissait de savoir si le spectre de Markoff peut être obtenu comme spectre d'un opérateur, ce qui pourrait expliquer son apparition dans des objets physiques tels que des oscillateurs [635].

Les principaux résultats auxquels on est parvenu sont les suivants :

- On a reformulé l'approche sur les tores percés conformes en la plaçant dans le cadre plus vaste des groupes fuchsiens. Ceci a permis de comprendre comment étudier le cas hyperbolique non complètement traité dans ce qui précède. Ceci a aussi fait le lien complet avec la théorie de Teichmüller interprétée ici comme théorie des représentations d'un groupe de Poincaré dans $PSL(2,\mathbb{R})$. Cette approche généralise la théorie de Markoff de façon très satisfaisante. On dispose ainsi d'un espace de modules qui joue le rôle de l'ensemble des triplets de traces pour les tores percés. On a aussi un groupe qui agit sur cet espace, généralisant l'action du groupe du triangle du cas des tores percés. On a pu en déduire des résultats nouveaux sur des équations diophantiennes à plus grand nombre de variables que l'on peut traiter comme l'équation de Markoff. Il existe déjà un tel exemple [43]. Pour développer l'approche géométrique correspondante, on a recherché les objets à considérer à la place des surfaces de Riemann qui semblent de ce point de vue un peu limitées. C'est ainsi que les espaces de Stein ont été abordés, mais ils ne sont certainement pas la bonne notion pour de nouvelles généralisations, et on a indiqué pourquoi il faut privilégier les domaines de Riemann.
- On a ensuite étudié le lien avec le codage des géodésiques sur une surface de Riemann. Ceci constitue un sujet où les résultats généraux disponibles restent limités [723] [725], mais qui a un lien très important avec l'étude des systèmes dynamiques et la théorie ergodique, notamment les géodésiques fermées. La réflexion

a été faite dans la perspective de sortir de la seule théorie de Markoff qui semble pourtant la seule où on dispose de résultats signicatifs [704].

- La fonction êta de Dedekind est sous-jacente à tous nos travaux. On a montré qu'elle donne un certain nombre des fonctions transcendantes classiques sur lesquelles sont construits les plus beaux résultats de la théorie de nombres. On a donc cherché à repérer un certain nombre d'expressions où cette fonction η apparaît, donnant la fonction modulaire, les fonctions elliptiques, les fonctions thêta, etc... On a montré comment ces dernières sont importantes pour la théorie de l'information, et notamment la dualité codage/quantification. Une idée que l'on a ensuite cherché à approfondir est que ces expressions expliquent à partir de la décomposition en produit infini de η beaucoup des produits infinis classiques des autres fonctions. Un point a été laissé de côté, concernant les fonctions L. Mais elles ont également une propriété en relation avec ce schéma [246].
- On a ensuite cherché à comprendre certaines des expressions différentielles mises en avant dans les premiers travaux de Harvey Cohn relatifs à l'interprétation géométrique de la théorie de Markoff ([147], [151], [152], [147]). Ceci permet de faire le lien avec la sphère à trois trous, et de comprendre par là même certains travaux de Asmus Schmidt [700]. Une approche hypergéométrique est également possible à partir de là. Mais le plus important est que ce développement met l'accent sur la double uniformisation à l'oeuvre sur les tores percés.
- Cette double uniformisation vient de ce que le tore percé a pour revêtement conforme le demi-plan de Poincaré, mais qu'il peut être complété en un tore qui a pour revêtement conforme C. Le tore donne naturellement naissance aux courbes elliptiques et donc à des équations cubiques analogues à celles considérées avant, cependant que le tore percé donne pour ce qui le concerne naissance aux équations analogues à celle de Markoff. Comme l'auteur a décrit dans les chapitres précédents les relations que ces deux types d'équations algébriques entretiennent, il convenait de mieux comprendre cette situation qui a pour conséquence l'existence d'une riche structure de double revêtement conforme [533] sur les tores percés. Cette observation a des implications arithmétiques profondes comparables à celles du cas de la conjecture de Shimura Taniyama Weil [844] où l'un des revêtements est euclidien et l'autre hyperbolique. On en a déduit une construction générale permettant de paramétrer presque tous les points d'un tore percé avec des fonctions elliptiques. Toutes les conséquences d'une telle idée ne sont pas tirées, notamment ce que l'on pourrait en tirer pour une conjecture de Selberg. Le résultat essentiel auquel on est parvenu est que la fonction êta de Dedekind peut être interprétée avec le laplacien d'un tore. Cette approche débouche sur la mise en avant d'un nouvel invariant fondamental dont on a repéré l'utilisation en physique.
- ullet C'est à partir de ces observations que les réflexions sur le chaos quantique apparaissent naturellement. Toute la réflexion s'organise autour d'une équation de Schrödinger dont l'espace des phases est un tore ou un tore percé. Dans le premier cas, on a mis en évidence un lien profond avec la loi de réciprocité quadratique, et donc la fonction η de Dedekind et les sommes de Gauss, mais il est curieux de constater que le temps devient discret. Le cas où l'espace des phases est un tore percé reste à étudier, et l'auteur conjecture que c'est celui qui donne l'interprétation recherchée du spectre de Markoff comme spectre d'un opérateur lié à une équation de Schrödinger.

- En approfondissant ce sujet, on est parvenu à résoudre le problème de Riemann-Hilbert associé à la théorie de Markoff classique. En d'autres termes on a pu écrire une équation différentielle fuchsienne dont le groupe de monodromie est engendré par les deux matrices A_0 et B_0 qui engendrent le groupe $[SL(2,\mathbb{Z}),SL(2,\mathbb{Z})] \simeq \mathbf{F}_2$. Il reste à approfondir l'analyse spectrale de l'opérateur différentiel associé.
- On a enfin esquissé le lien avec la théorie de fibrés vectoriels et montré à partir de là comment se développe une approche par la K-théorie. La théorie de Markoff correspond dans ce contexte à des fibrés exceptionnels du plan projectif $P_2(\mathbb{C})$ et aux hélices de D. Yu. Nogin [597] [598]. Cette approche est particulièrement importante car elle donne un cadre permettant de comprendre un certain nombre de conjectures très importantes encore non résolues comme les conjectures de Lichtenbaum ou celle de Birch et Swinnerton-Dyer, grâce à une interprétation automorphe de la K-théorie. Au passage, des liens avec la conjecture de Riemann ont été approfondis.

2. Rappels succincts sur les surfaces de Riemann

Le présent paragraphe est un simple rappel sur les surfaces de Riemann destiné à fixer les notations pour la suite. Il peut être omis par le lecteur averti et ne développe rien que l'on ne trouve dans [632].

Les objets géométriques que l'on a considérés précédemment, les tores percés conformes, sont des quotients du demi-plan de Poincaré \mathcal{H} par l'action d'un groupe fuchsien Γ , c'est-à-dire d'un sous-groupe discret de $PSL(2,\mathbb{R})$. Pour la plupart des surfaces de Riemann on peut généraliser la théorie développée pour les tores percés en utilisant un groupe fuchsien. On peut en effet construire par quotient de \mathcal{H} pour l'action d'un tel groupe toutes les surfaces de Riemann à l'exception de celles dont le support topologique est homéomorphe ([253] p. 208) à la sphère de Riemann S^2 , à la sphère percée par extraction d'un point \mathbb{C} , à la sphère percée par extraction de deux points \mathbb{C}^* , au tore \mathcal{T} . Pour toute autre surface de Riemann \mathcal{M} le groupe de Poincaré $\pi_1(\mathcal{M},*)$ peut être représenté comme sous-groupe Γ du groupe des automorphismes $PSL(2,\mathbb{R})$ de son revêtement conforme \mathcal{H} . La surface \mathcal{M} est de forme \mathcal{H}/Γ , et une représentation de groupes $\overline{\rho}: \pi_1(\mathcal{M},*) \to \Gamma$ porte les données géométriques de \mathcal{M} . Dans la suite les surfaces \mathcal{M} sont connexes, et donc connexes par arcs, de sorte que leur groupe de Poincaré $\pi_1(\mathcal{M},*)$ ne dépend pas du point de base servant à le définir.

- 2.1. Uniformisation des surfaces de Riemann. Un revêtement conforme d'une surface de Riemann \mathcal{M} est dit universel si et seulement si son groupe de Poincaré $\pi_1(\mathcal{M},*)$ est réduit à un élément neutre. La surface de Riemann est alors simplement connexe. Toutes les surfaces de Riemann simplement connexes sont connues à équivalence conforme près ([253] p. 206). Elles correspondent aux trois modèles de géométrie classique ([849] [580] p. 486) dont la structure conforme est unique sur le support topologique que l'on considère, à courbure constante positive (cas sphérique), à courbure nulle (cas euclidien), et à courbure négative (cas hyperbolique). Il s'agit des suivantes :
 - La sphère de Riemann $S^2=\mathbf{P}_1(\mathbb{C})$ de type conforme (0,0,0).
 - Le plan complexe $\mathbb{C} = S^2 \setminus \{\infty\}$ qui est du type conforme (0,1,0).
 - Le demi-plan de Poincaré \mathcal{H} qui est du type conforme (0,0,1).

Le théorème de Killing-Hopf ([769] p. 135) garantit que toute surface de Riemann peut ainsi être obtenue comme quotient de l'une des trois surfaces \mathcal{S}^2 , \mathbb{C} , \mathcal{H} , par l'action d'un sous-groupe de leur groupe d'automorphismes conformes. Il

constitue la base de trois théories de Galois s'appliquant respectivement pour les surfaces de Riemann. Si \mathcal{M} est une surface de Riemann de revêtement simplement conforme \mathcal{M}^{sc} et de groupe de revêtement Γ , sous-groupe de $Aut(\mathcal{M}^{sc})$, on a équivalence conforme des surfaces \mathcal{M} et \mathcal{M}^{sc}/Γ . D'où l'importance de connaitre les groupes d'automorphismes des surfaces simplement connexes ([253] p. 206):

 $Aut(S^2) \simeq PSL(2,\mathbb{C})$ groupe des transformations de Möbius complexes,

 $Aut(\mathbb{C}) \simeq P\Delta L(2,\mathbb{C})$ groupe donné par les matrices triangulaires supérieures,

 $Aut(\mathcal{H}) \simeq PSL(2,\mathbb{R}) \simeq Isom^+(\mathcal{H})$ groupe des matrices réelles.

Le groupe $PSL(2,\mathbb{C}) = \{M \in GL(2,\mathbb{C}) \mid \det(M) = 1\}/\{\pm 1\}$ de la sphère contient les deux autres groupes cités, ce qui réunit les trois théories de Galois que l'on vient d'évoquer en une seule. Les sous groupes de $PSL(2,\mathbb{C})$ sont les groupes kleinéens [726].

On connaît tous les types conformes de surfaces de Riemann qui ont les surfaces S^2 ou \mathbb{C} pour revêtement universel ([253] p. 208). Ce sont les cas suivants :

- La sphère de Riemann S^2 est la seule surface de Riemann qui possède S^2 pour revêtement universel conforme. Son groupe de Poincaré est trivial.
- \mathbb{C} , $\mathbb{C}^* \simeq \mathbb{C}/\omega\mathbb{Z}$, et les tores compacts $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\Lambda} = \mathbb{C}/\Lambda$ sont les seules surfaces de Riemann qui ont $\mathbb{C} = \mathcal{S}^2 \setminus \{\infty\}$ pour revêtement universel conforme.
- La sphère percée d'une piqûre $\mathbb{C} = \mathcal{T}_0^{\bullet} = \mathcal{S}^2 \setminus \{\infty\}$ est du type conforme (0,1,0). Son groupe de Poincaré est trivial.
- La sphère percée de deux piqûres $\mathbb{C}^* = \mathcal{T}_0^{\bullet \bullet} = \mathcal{S}^2 \setminus \{0, \infty\}$ est du type conforme (0, 2, 0). On peut la représenter par un cylindre $\mathbb{C}/\omega\mathbb{Z}$ défini avec $\omega \in \mathbb{C}^*$. Elle a pour groupe de Poincaré $\pi_1(\mathbb{C}^*, *) \simeq \mathbb{Z}$. Dans \mathbb{C} le domaine fondamental est une bande permettant de paver avec le groupe \mathbb{Z} tout l'espace \mathbb{C} .
- Les tores compacts $\mathcal{T}_{\Lambda} = \mathbb{C}/\Lambda$ sont du type conforme (1,0,0), conformément équivalents à des courbes elliptiques. La projection canonique donne un révêtement universel d'un tel tore et est définissable avec des fonctions elliptiques. Son groupe de Poincaré est $\pi_1(\mathcal{T},*) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}^2$. On peut montrer que $Aut(\mathcal{M})$ est une extension de \mathbb{C}/Λ par un groupe fini ([253] p. 296, [675] p. 48), en général $\{\pm 1\}$. Mais deux cas se distinguent correspondant à la symétrie carrée $\Lambda \simeq \mathbb{Z} \oplus i\mathbb{Z}$ et à la symétrie hexagonale $\Lambda \simeq \mathbb{Z} \oplus j\mathbb{Z}$.
- ullet Trois types conformes de surfaces de Riemann complémentaires aux précédents sont caractérisés par le fait que \mathcal{H} est cette fois leur revêtement universel conforme ([253] p. 210) mais que leur groupe de Poincaré est commutatif. En dehors de \mathcal{H} lui-même, on trouve les suivants :
- La sphère percée d'une piqûre et d'un trou $\mathcal{D}^{\bullet} = \{z \in \mathbb{C}; \ 0 < | \ z \ | < 1\}$ qui est du type conforme (0,1,1) et vérifie $\pi_1(\mathcal{D}^{\bullet},*) \simeq \mathbb{Z}$.
- La sphère percée de deux trous $\mathcal{D}_{\alpha}^{\circ} = \{z \in \mathbb{C}; \ 0 < \alpha < | \ z \ | < 1\}$ qui est du type conforme (0,0,2) et vérifie $\pi_1(\mathcal{D}_{\alpha}^{\circ},*) \simeq \mathbb{Z}$.
- Dans tous les autres cas qui sont en nombre infini, le revêtement universel conforme de \mathcal{M} est le demi-plan de Poincaré \mathcal{H} sur lequel agit son groupe de Poincaré $\pi_1(\mathcal{M},*)$ qui est non commutatif. Ce groupe est isomorphe à un groupe fuchsien $\Gamma \subset PSL(2,\mathbb{R}) \simeq Aut(\mathcal{H})$ agissant sur \mathcal{H} pour donner $\mathcal{M} \simeq \mathcal{H}/\Gamma$. En pratique [201], la surface \mathcal{M} peut être visualisée globalement avec un domaine fondamental pour l'action du groupe Γ dans \mathcal{H} . Pour la définition d'un domaine fondamental polygonal on peut utiliser la méthode de [416].

2.2. Surfaces de Riemann définies par un groupe fuchsien. Les groupes fuchsiens Γ permettent de décrire à équivalence conforme près toutes les surfaces de Riemann en dehors de celles qui ont \mathcal{S}^2 ou \mathbb{C} pour revêtement universel. On a :

Proposition 2.1. Hors les types (0,0,0), (0,1,0), (1,0,0), (0,2,0), (0,1,1), (0,0,2), toute surface de Riemann est conformément équivalente à une surface qui peut être obtenue comme un espace quotient de forme

$$\mathcal{M} = \mathcal{H}/\Gamma$$
,

où $\Gamma \simeq \pi_1(\mathcal{M}, *)$ groupe fuchsien non commutatif isomorphe à un sous groupe de $Aut(\mathcal{H}) \simeq PSL(2, \mathbb{R})$.

Toutes les surfaces de type fini de genre $g \geq 2$ sont décrites ainsi. Mais c'est aussi le cas pour certaines surfaces de genre 0 ou 1. Les tores percés conformes paraboliques qui sont de genre 1 sont donnés par cette dernière proposition. Avec une matrice parabolique $P = L^{-1}$, le groupe fuchsien correspondant a pour présentation $\langle \overline{A}, \overline{B}, \overline{P} \mid [\overline{A}, \overline{B}] \overline{P} = \mathbf{1}_2 \rangle$. Les tores percés conformes hyperboliques également de genre 1 sont donnés par un groupe fuchsien dont on connaît une présentation $\langle \overline{A}, \overline{B}, \overline{H} \mid [\overline{A}, \overline{B}] \overline{H} = \mathbf{1}_2 \rangle$ où H matrice hyperbolique. Les sphères à trois piqûres qui sont de genre 0, c'est-à-dire les pantalons, peuvent être obtenus de même ([769] p.114). Le groupe fuchsien correspondant est isomorphe au groupe du triangle \mathbf{T}_3 .

2.3. Autre anti-équivalence de catégories. Le théorème fondamental de Riemann associe à toute surface de Riemann compacte \mathcal{M} une équation polynômiale Q(x,y)=0. En normalisant Q on se ramène à une relation algébrique irréductible entre les variables complexes y et x de forme suivante

$$\Phi(y,x) = y^n + \phi_1(x)y^{n-1} + \dots + \phi_n(x) = 0,$$

où $\phi_k(x)$ $(1 \le k \le n \le m)$ sont des fonctions rationnelles de x. Leurs dénominateurs s'annulent en un nombre fini de pôles où l'on peut considérer que la valeur prise par y devient infinie. Ailleurs, la résolution en y d'une telle équation donne une fonction multivalente y(x), chaque valeur de x permettant de définir n valeurs $y_i(x)$ dans $\mathbb C$ là où le discrimant de Φ n'est pas nul, c'est-à-dire dans un ouvert $\mathbb C_\Phi$ de $\mathbb C$ tel que $\mathbb{C}\backslash\mathbb{C}_{\Phi}$ ensemble fini. Pour tout point $x\in\mathbb{C}_{\Phi}$, chaque uniformisation $y_i(x)$ donne par le théorème des fonctions implicites une carte locale holomorphe qui se prolonge analytiquement grâce au théorème de Puiseux ([215] p. 106, [24] théorème 7.7). L'ensemble de ces prolongements définit une surface de Riemann $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ à n feuilles au dessus de \mathbb{C}_{Φ} . On complète avec la projection π_x qui a chaque point $p_i = (x, y_i(x)) \in \mathcal{N}$ associe $\pi_x((x, y_i(x))) = x \in \mathbb{C}_{\Phi}$. Elle constitue un revêtement à n feuilles de \mathcal{N} au dessus de \mathbb{C}_{Φ} . Les feuilles se raccordent en des points singuliers de \mathcal{M} qui sont ses points de ramification. On voit comment les feuilles se raccordent en observant les termes $y_i(x)$ pour x tournant autour de chaque point de $\mathbb{C}\setminus\mathbb{C}_{\Phi}$. En chacun de ces points on détermine ainsi une permutation sur les feuilles se décomposant en cycles. Elle permet de prolonger le revêtement local induit par π_x au-dessus d'un disque percé en x. On ajoute autant de points à \mathcal{N} au-dessus de x qu'il y a de cycles dans la permutation des feuilles au voisinage. On fait de même au point à l'infini $x = \infty$ en utilisant des coordonnées homogènes ([116] p. 205). On peut alors s'assurer que la surface $\mathcal N$ complétée n'est autre que $\mathcal M$. Il en résulte en recollant tous les morceaux un revêtement global prolongeant π_x à la surface de départ et noté de même $\pi_x: \mathcal{M} \longrightarrow \mathbf{P}_1(\mathbb{C})$. Entre la courbe affine définie dans \mathbb{C}^2 par Φ et \mathcal{M} il peut y avoir une différence portant sur un nombre fini de points. Mais en complétant par ces points dans $\mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ la surface de Riemann compacte devient une courbe projective sur \mathbb{C} . On montre alors que π_x est méromorphe sur \mathcal{M} et qu'il en est de même de la seconde projection π_y définissable grâce aux valeurs $y_i(x)$. Enfin il est facile de s'assurer que le corps $\mathcal{K}(\mathcal{M})$ des fonctions méromorphes sur \mathcal{M} s'identifie à $\mathbb{C}(\pi_x, \pi_y)$ et a pour degré n sur le corps $\mathbb{C}(\pi_x)$ qui est de degré de transcendance 1 sur $\mathbb C$. De plus le corps $\mathbb C(\pi_x,\pi_y)$ s'identifie aisément au corps des fractions de l'anneau $\mathbb{C}[X,Y]/Q(X,Y)\mathbb{C}[X,Y] \simeq \mathcal{K}(\mathcal{M})$. Cette construction donne un foncteur K de la catégorie des surfaces de Riemann compacte connexe dans celle des corps de fonctions complexes, c'est-à-dire des extensions de type fini et de degré de transcendance 1 de C. Ce foncteur se prolonge en une anti-équivalence de catégories (une théorie de Galois) entre surfaces de Riemann compactes et corps de fonctions complexes, elle-même prolongeable entre la catégorie des surfaces de Riemann dee type fini et celle de certaines C-algèbres ([226] Tome 2, p. 138 et [675] p. 71). Des algèbres vers les surfaces, on procède en considérant l'ensemble des valuations de l'algèbre et en identifiant chacune d'elle à un point (une place). La méthode pour construire la structure de surface de Riemann sur ces valuations est précisée dans [135], [458] ou [23] (p. 92). On en trouve un exposé simplifié dans [239] qui permet de bien comprendre l'analogie entre arithmétique et corps de fonctions chère à André Weil [834]. Ceci donne la signification de la notion de diviseur d'une surface, ainsi que du théorème de Riemann-Roch ([675] p. 94, [239] p. 158, [23] p. 182). Le lien avec les formes différentielles en faisable avec le quotient $\Omega_{\mathcal{K}(\mathcal{M})}$ du $\mathcal{K}(\mathcal{M})$ -espace des symboles df où $f \in \mathcal{K}(\mathcal{M})$ par le sous-espace engendré par les relations d(f+f')-df-df', d(ff')-fdf'-(df)f', dc où $c\in\mathbb{C}$. On identifie dans cet espace un C-espace des formes différentielles méromorphes, c'est-à-dire s'écrivant fdz où $f \in \mathcal{K}(\mathcal{M})$ méromorphe dans lequel on trouve avec f holomorphe un espace de cohomologie $H^1(\mathcal{M}, \mathbb{C})$.

2.4. C*-algèbres. Il existe d'autres anti-équivalences de catégories concernant les surfaces de Riemann. Et par exemple ([505] p. 93) le théorème de Gelfand-Naimark ([320] p. 160) permet d'en construire une avec l'anti-équivalence qui existe entre la catégorie des espaces topologiques séparés et celle des C^* -algèbres. Cette dernière associe à tout espace topologique la C^* -algèbre des fonctions complexes continues définies sur cet espace. En sens inverse la construction se fait en développant [159] (théorème 6 p. 25). Il s'agit d'un cas particulier de la transformation de Gelfand associant à toute algèbre de Banach commutative son spectre de caractères localement compact, compact si l'algèbre est unitaire ([320] p. 108). Cette construction donne un cadre très naturel aux habituelles transformations de Fourier, mais surtout elle permet de retrouver une démonstration directe du fait que tout espace compact peut être vu comme un espace algébrique sur $\mathbb C$. On trouve dans [709] une tentative d'extension de cette équivalence aux algèbres de Kac, projet qui a fait l'objet d'intenses recherches autour de la géométrie non commutative d'Alain Connes [158]. Les C^* -algèbres font quant à elles l'objet d'une intense activité de recherche car elles structurent les ensembles d'observables de la mécanique quantique ([823] p.548). La notion d'anti-équivalence signifie que différentes théories parlent en réalité des mêmes objets habillés de déguisements différents, ou considérés de points de vue différents, notamment selon qu'ils sont étudiés globalement ou localement. Il serait utile de comprendre quelles propriétés supplémentaires sur les C^* -algèbres traduisent les propriétés certaines surfaces de Riemann ([823] p. 548, [262]). Parler d'anti-équivalence de catégories ou de théorie de Galois revient essentiellement au même, la théorie de Galois classique ayant simplement donné le premier exemple historique d'une telle anti-équivalence.

2.5. Prolongement des surfaces et espèces de groupes fuchsiens. On dit \mathcal{M} est prolongeable en \mathcal{M}' ou que \mathcal{M}' prolonge \mathcal{M} si et seulement s'il existe une application holomorphe f de \mathcal{M} dans \mathcal{M}' telles que $\mathcal{M}' \backslash f(\mathcal{M})$ ait un intérieur non vide. Un trou dans la surface \mathcal{M} peut être comblé avec un disque fermé à une piqûre sans changer la nature du support topologique de la surface. Les surfaces compactes fournissent des exemples de surfaces non prolongeables. Les tores troués conformes donnent au contraire des exemples de surfaces prolongeables en des tores percés.

Le prolongement conduit à distinguer les groupes fuchsiens de première et ceux de seconde espèce ([47] p. 202). On utilise pour cela l'ensemble $\Lambda(\Gamma)$ des points limites des orbites Γz où z dans un domaine fondamental. Pour un groupe fuchsien Γ de seconde espèce, la surface de Riemann \mathcal{H}/Γ est prolongeable. Et on trouve sur le bord de \mathcal{H} pour $\Lambda(\Gamma)$ un ensemble vide, à un ou deux éléments, ou un ensemble parfait et nulle part dense dans le bord de \mathcal{H} ([408] p. 67). Pour un groupe de première espèce Γ , la surface de Riemann \mathcal{H}/Γ n'est pas prolongeable et l'ensemble $\Lambda(\Gamma)$ est dense dans le bord de \mathcal{H} .

- 2.6. Groupes fuchsiens élémentaires. L'action d'un groupe fuchsien Γ classe les points de $\mathcal{H} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ en points paraboliques, hyperboliques et elliptiques. Au delà des groupes de première ou de seconde espèce, il existe un autre type de groupe fuchsien dit élémentaire caractérisé par le fait qu'il possède une orbite finie pour son action dans la clôture euclidienne $\mathcal{H} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ de \mathcal{H} . Un tel groupe est tel que $\Lambda(\Gamma)$ n'a pas plus de deux points ([408] 3.8 p. 78). Si un groupe fuchsien Γ n'est pas élémentaire il contient une infinité d'éléments hyperboliques, et tout élément elliptique est d'ordre fini ([408] p. 48). Si au contraire un groupe fuchsien Γ est élémentaire il est cyclique (fini ou infini) ou conjugué dans $PSL(2,\mathbb{R})$ à un groupe engendré par les classes de g(z) = -1/z et h(z) = kz où k > 1. Inversement, les sous groupes cycliques de $PSL(2,\mathbb{R})$ engendrés par un élément parabolique ou hyperbolique sont fuchsiens, et les sous-groupes cycliques de $PSL(2,\mathbb{R})$ engendrés par un élément elliptique sont fuchsiens si et seulement s'ils sont finis.
- 2.7. Signature d'un groupe fuchsien. Avec [739] (ch. 1.3 à 1.5), [452] (ch. 10) ou [434] (§9.5), on complète maintenant \mathcal{H} en lui ajoutant les pointes pour Γ . Elles sont situées sur son bord et donnent un ensemble plus vaste \mathcal{H}^* . Ceci définit une nouvelle surface de Riemann \mathcal{H}^*/Γ qui est compacte si on suppose que le groupe Γ est de première espèce. On la note $X(\Gamma)$. L'ensemble des pointes pour Γ ajoutées à \mathcal{H} est fini et stable pour l'action de Γ . Il comble au quotient toutes les piqûres de la surface de Riemann \mathcal{H}/Γ .

On dit de $X(\Gamma)$ qu'il s'agit d'une courbe modulaire lorsque $\Gamma \subset PSL(2,\mathbb{Z})$ et Γ contient le sous-groupe de congruence $\Gamma(n) = PG(n)$ de $PSL(2,\mathbb{Z})$ défini avec

$$G(n) = \{ \left[\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right] \in SL(2,\mathbb{Z}) \mid a \equiv d \equiv 1 \; (\mod n), \; b \equiv c \equiv 0 \; (\mod n) \}.$$

G(2) est libre à deux générateurs ([386] p.154). On note $X(\Gamma(n)) = X(n)$. Ainsi la courbe modulaire $X(\Gamma_0(n)) = X_0(n)$ est définie avec $\Gamma = \Gamma_0(n) = PG_0(n)$:

$$G(n) \subset G_0(n) = \{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}) \mid c \equiv 0 \pmod{n} \} \subset PSL(2, \mathbb{Z}).$$

2.7.1. Cas où le revêtement universel d'une telle surface n'est pas \mathcal{H} . Pour $\Gamma = \Gamma(1) = \Gamma_0(1) = PSL(2,\mathbb{Z})$, on trouve $\mathcal{H}^* = \mathcal{H} \cup \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$, et $\mathcal{H}^*/PSL(2,\mathbb{Z})$ est conformément équivalent à la sphère de Riemann \mathcal{S}^2 . Par construction on est dans une situation relevant de ce qui est expliqué dans l'article de B. Mazur [533] sur les doubles revêtements conformes. On a ici deux uniformisations qui interagissent, une euclidienne et l'autre hyperbolique. Les points de \mathbb{Q} sont tous paraboliques, déductibles de ∞ avec un élément de $PSL(2,\mathbb{Z})$, de sorte que $\mathcal{H}^*/PSL(2,\mathbb{Z})$ s'identifie à la surface modulaire $\mathcal{H}/PSL(2,\mathbb{Z})$ complétée de son point à l'infini. Cette équivalence conforme est donnée par l'invariant modulaire

$$J: \tau \in \mathcal{H}/PSL(2,\mathbb{Z}) \cup \{\infty\} \simeq \mathcal{H}^*/PSL(2,\mathbb{Z}) \longmapsto J(\tau) \in \mathbb{C} \cup \{\infty\} \simeq \mathcal{S}^2.$$

Cet invariant définit $J(\tau) \in \mathbb{C}$ pour tout $\tau \in \mathcal{H}$, et $J(\tau) = \infty$ pour $\tau \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$. Le demi-plan \mathcal{H} devient ainsi un revêtement ramifié de \mathbb{C} avec un point elliptique de ramification 2 en i et un point elliptique de ramification 3 en $(-1 + i\sqrt{3})/2$. On retrouve ainsi ([408] p. 71) le domaine fondamental du groupe modulaire $PSL(2,\mathbb{Z})$ et ses deux classes de conjugaison de sous groupes cycliques maximaux de $PSL(2,\mathbb{Z})$, l'une correspondant à des groupes d'ordre 2, l'autre à des groupes d'ordre 3. Ceci est lié à la présentation de $PSL(2,\mathbb{Z})$ comme produit libre d'un groupe cyclique d'ordre 2 et d'un groupe cyclique d'ordre 3 tels que rappelés par exemple dans [729] (pp. 128-131).

2.7.2. Cas où le revêtement universel de \mathcal{H}^*/Γ est \mathcal{H} . Cette situation définit un nouveau groupe fuchsien Γ^* et une équivalence conforme

$$\mathcal{H}^*/\Gamma \simeq \mathcal{H}/\Gamma^*$$
.

La compacité de \mathcal{H}/Γ^* a pour conséquence que Γ^* ne construit pas de pointe, et que le nombre r de classes de points elliptiques pour l'action de Γ^* est fini. En revenant par équivalence conforme à \mathcal{H}^*/Γ les singularités demeurent. Par revêtement, on peut éventuellement procéder ([769] ch. 8) à la désingularisation de \mathcal{H}/Γ^* . Les points elliptiques correspondent à des points singuliers marqués sur la surface. La ramification ([226] ch. VI) décrit les phénomènes qui se manifestent pour l'apparition de ces points. En considérant

$$\mathcal{H}_{\Gamma^*} = \mathcal{H} \setminus \{z \mid z \text{ elliptique pour } \Gamma^*\},$$

on a les propriétés suivantes :

- 1- La surface \mathcal{H}/Γ^* prolonge $(\mathcal{H}_{\Gamma^*}/\Gamma^*)$.
- 2- L'application canonique $\pi: \mathcal{H} \to \mathcal{H}/\Gamma^*$ est localement bijective au voisinage de tout point de \mathcal{H}_{Γ^*} .
- 3- Pour tout point elliptique \mathbf{p}_i (i=1,...,r) dans \mathcal{H}/Γ^* on peut définir un nombre v_i tel que $Card(\pi^{-1}(\mathbf{p}_i)) = v_i$. Ceci classe les points elliptiques en classant les nombres v_i par ordre croissant. On dit que v_i est l'indice de ramification du point \mathbf{p}_i ou que les points $\mathbf{p}_1,...,\mathbf{p}_r$ sont marqués avec les nombres $v_1,...,v_r$. Cette

approche introduit pour la surface de Riemann $\mathcal{M} \simeq \mathcal{H}/\Gamma$ une signature, dite aussi signature de Γ :

$$(g; n: v_1, v_2, ..., v_r, v_{r+1}, ..., v_n; m),$$

où l'on note

$$2 \le v_1 \le v_2 \le \dots \le v_r \le v_{r+1} = \dots = v_n = \infty.$$

Cette signature indique que la surface \mathcal{M} de genre g possède r points elliptiques $\mathbf{p}_1,...,\mathbf{p}_r$ d'indices de ramification $v_1,...,v_r$, des points paraboliques $\mathbf{p}_{r+1},...,\mathbf{p}_n$ en nombre n-r, ainsi que m trous. Son type conforme (g,n,m) s'en déduit.

2.8. Invariant d'Euler-Poincaré. La caractéristique d'Euler-Poincaré d'un groupe fuchsien Γ de signature $(g; n: v_1, v_2, ..., v_r, v_{r+1}, ..., v_n; m)$ est définie avec :

$$-\chi(\Gamma) = 2g - 2 + \sum_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{v_i}\right) + m = 2g - 2 + \sum_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{v_i}\right) + (n - r) + m.$$

Ce nombre est positif lorsque le groupe fuchsien Γ n'est pas réduit à l'unité. Le covolume de Γ , c'est-à-dire l'aire hyperbolique de \mathcal{M} , est ([47] p. 269)

$$Cov(\Gamma) = \mu(\mathcal{M}) = 2\pi(-\chi(\Gamma)).$$

Dans le cas d'un groupe fuchsien Γ de première espèce, on a nécessairement m=0 et cette formule donne l'aire hyperbolique de tout domaine fondamental convexe de Γ dans le demi-plan de Poincaré \mathcal{H} . La caractéristique d'Euler-Poincaré est aussi l'invariant de la surface \mathcal{M} défini classiquement comme somme alternée des nombres de Betti pour les r-simplexes construits par une triangulation

$$\chi(\Gamma) = \chi_{\mathcal{M}} = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j b_j(\mathcal{M}) = b_0(\mathcal{M}) - b_1(\mathcal{M}) + b_2(\mathcal{M}).$$

Pour une surface compacte \mathcal{M} , $b_0(\mathcal{M})$ correspond au nombre de composantes connexes, $b_2(\mathcal{M})$ est le nombre de composantes connexes orientables ([466] p. 257 et p. 260), et $b_1(\mathcal{M})$ est défini par le nombre de générateurs de $\pi_1(\mathcal{M}, *)$ ou de son quotient commutatif $H_1(\mathcal{M}, \mathbb{Z})$, le premier groupe de l'homologie singulière de \mathcal{M} :

$$H_1(\mathcal{M}, \mathbb{Z}) \simeq \pi_1(\mathcal{M}, *)/[\pi_1(\mathcal{M}, *), \pi_1(\mathcal{M}, *)].$$

2.9. Géométrie symplectique. Dans chaque classe de $H_1(\mathcal{M}, \mathbb{Z})$ on peut trouver une courbe fermée c(t) infiniment différentiable sur \mathcal{M} , même géodésique dans différents cas. Ceci permet en tout point $P \in \mathcal{M}$ d'intersection de deux telles courbes $c_1(t_1)$ et $c_2(t_2)$ correspondant à deux éléments différents γ_1 et γ_2 de $H_1(\mathcal{M}, \mathbb{Z})$ de considérer la base $(\partial c_1/\partial t_1, \partial c_2/\partial t_2)$ de l'espace tangent en P. Comme dans le cas que l'on privilégie ici \mathcal{M} est orientable, avec un vecteur normal n on peut définir $\varepsilon(P) = 1$ ou $\varepsilon(P) = -1$ selon que le triplet $(n, \partial c_1/\partial t_1, \partial c_2/\partial t_2)$ est direct ou non. Et en sommant sur tous les points d'intersection des courbes $c_1(t_1)$ et $c_2(t_2)$ on obtient le nombre d'intersection $\gamma_1 \sqcap \gamma_2$. La géométrie symplectique s'introduit alors de façon naturelle pour une telle surface de Riemann en étendant à tout le groupe d'homologie $H_1(\mathcal{M}, \mathbb{Z})$ ce nombre d'intersections qui devient une forme bilinéaire antisymétrique non dégénérée $H_1(\mathcal{M}, \mathbb{Z}) \times H_1(\mathcal{M}, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}$. On en déduit l'existence de bases symplectiques et de dissections canoniques associées ([823] p. 105) permettant de voir \mathcal{M} au moyen d'un domaine fondamental de \mathcal{H} sur le bord duquel peut être matérialisée la dissection canonique. On peut prolonger de façon naturelle de \mathbb{Z} à \mathbb{R} cette forme bilinéaire en $H_1(\mathcal{M}, \mathbb{R}) \times H_1(\mathcal{M}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$. Ceci construit un espace vectoriel symplectique [112]. Remarquons que le fait que \mathcal{M} est associée à un groupe fuchsien et donc orientable est essentiel pour que la construction que l'on vient de faire soit valide. On peut encore étendre cette forme en une forme hermitienne définie positive ([823] p. 189) au travers de la notion de polarisation sur les variétés abéliennes complexes qui caractérise les jacobiennes. Ce point est évoqué plus loin.

2.10. Approche topologique du groupe de Poincaré. Pour toute surface de Riemann \mathcal{M} , la signature contient toutes les données topologiques essentielles, mais aucune donnée conforme. Elle donne une présentation du groupe de Poincaré $\pi_1(\mathcal{M},*) \simeq \Gamma$. On utilise pour le voir le théorème de Seifert et Van Kampen ([308] p. 30) et un passage au quotient pour les points elliptiques. Ceci donne :

PROPOSITION 2.2. Le groupe de Poincaré $\pi_1(\mathcal{M},*)$ de toute surface \mathcal{M} de type conforme (g,n,m) admet une présentation à 2g+n+m générateurs et r+1 relations où

1/Les générateurs sont $a_1, b_1, ..., a_g, b_g, e_1, ..., e_r, p_{r+1}, ..., p_n, h_1, ..., h_m$

2/ Les relations sont

$$\prod_{i=1}^g [a_i,b_i]e_1...e_rp_{r+1}...p_nh_1...h_m=1, \ \forall i=1,...,r, \ e_i^{\upsilon_i}=1.$$

Sa signature vaut

$$(g; n : v_1, v_2, ..., v_r, \infty_{n-r}; m).$$

Ce résultat permet le calcul du premier groupe d'homologie

$$H_1(\mathcal{M}, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{2g-r} \times \mathbb{Z}/v_1\mathbb{Z} \times ... \times \mathbb{Z}/v_r\mathbb{Z}.$$

Dans le cas compact où n = r et m = 0, on a $\pi_1(\mathcal{M}, *) \simeq \mathbf{F}_{2g-r}$, groupe libre à 2g - r générateurs.

2.11. Approche conforme du groupe de Poincaré. Les données conformes d'une surface \mathcal{M} de revêtement conforme \mathcal{H} sont issues d'une représentation injective du groupe $\pi_1(\mathcal{M},*)$ dans le groupe $Aut(\mathcal{H}) = PSL(2,\mathbb{R})$. Ceci provient du résultat dû à Poincaré ([646] [866] (p. 114) [408] (p. 90)) :

PROPOSITION 2.3. Soit Γ un groupe fuchsien définissant une surface de Riemann de type fini $\mathcal{M} = \mathcal{H}/\Gamma$ ayant pour signature $(g; n : v_1, v_2, ..., v_n; m)$, Γ admet une présentation à 2g + n + m générateurs et r + 1 relations avec

1/ Les générateurs $\overline{A}_1, \overline{B}_1, ..., \overline{A}_g, \overline{B}_g, \overline{E}_1, ..., \overline{E}_r, \overline{P}_{r+1}, ..., \overline{P}_n, \overline{H}_1, ..., \overline{H}_m$ dans $PSL(2, \mathbb{R})$.

2/ Les relations

$$\prod_{i=1}^g [\overline{A}_i, \overline{B}_i] \overline{E}_1 ... \overline{E}_r \overline{P}_{r+1} ... \overline{P}_n \overline{H}_1 ... \overline{H}_m = 1, \ \forall i=1,...,r, \ \overline{E}_i^{v_i} = \mathbf{1}_2.$$

Les termes \overline{H}_i sont hyperboliques et sont définis à une permutation et à une conjugaison de $PSL(2,\mathbb{R})$ près. Il en est de même des termes \overline{P}_j qui sont paraboliques. Les termes \overline{E}_k engendrent des sous-groupes finis maximaux et non conjugués de Γ . Tout élément elliptique de Γ est conjugué dans $PSL(2,\mathbb{R})$ d'une puissance d'un terme \overline{E}_k , et tout élément parabolique de Γ est de même conjugué d'une puissance d'un terme \overline{P}_j . Tout élément d'ordre fini dans Γ est elliptique. Si le groupe fuchsien Γ est de première espèce, il n'y a pas de termes hyperboliques \overline{H}_i . Dans ce cas le

groupe Γ est cocompact, c'est-à-dire tel que $\mathcal{M} = \mathcal{H}/\Gamma$ soit une surface de Riemann compacte, si et seulement s'il n'y a pas de termes paraboliques.

2.12. Remontée à un groupe de matrices. On peut maintenant revenir d'un groupe fuchsien Γ à un groupe G dans $SL(2,\mathbb{R})$ défini par image inverse de $PSL(2,\mathbb{R})$ dans $SL(2,\mathbb{R})$. Avec le morphisme canonique $P:SL(2,\mathbb{R})\to PSL(2,\mathbb{R})$, on dit que le sous-groupe Γ de $PSL(2,\mathbb{R})$ est remonté en le groupe G dans $SL(2,\mathbb{R})$ si et seulement si la restriction P(G) est isomorphe à Γ . On a déjà vu pour les groupes de Fricke qu'il peut y avoir plusieurs images réciproques G de Γ par P. En fait ([720] p. 136) pour tout genre g > 1 tout sous-groupe fuchsien Γ de $PSL(2,\mathbb{R})$ définit 2^{2g} groupes G différents remontant Γ dans $SL(2,\mathbb{R})$. Un résultat de Irwin Kra [446] indique aussi qu'un groupe $\Gamma \subset PSL(2,\mathbb{R})$ peut être remonté dans $SL(2,\mathbb{R})$ si et seulement s'il ne possède pas d'élément d'ordre 2. Ces derniers peuvent en effet créer des problèmes comme le montre l'exemple de la transformation f(z) = -(1/z) d'ordre 2 dans $PSL(2,\mathbb{R})$. La matrice qui correspond à f dans $SL(2,\mathbb{R})$ est d'ordre 4. De tels éléments d'ordre 2 appelés "casquettes croisées", détruisent l'orientabilité de la surface que l'on étudie. Il faut faire appel comme dans [720] (p. 70) aux notions plus vastes de surface de Klein et de structure dianalytique pour trouver de tels éléments dans le groupe correspondant que l'on peut alors considérer comme un groupe kleinéen ([866] Theorem 3.2.8 p. 71, [867] Theorem 15.9 p. 35, [720] p. 89). Mais ce cas ne peut se produire pour les surfaces de Riemann que l'on étudie ici où le revêtement est \mathcal{H} . De plus on a :

Proposition 2.4. Soit Γ un groupe fuchsien qui définit une surface de Riemann de type fini $\mathcal{M} = \mathcal{H}/\Gamma$ ayant pour signature $(g; n : v_1, v_2, ..., v_n; m)$, le groupe Γ se remonte dans $SL(2,\mathbb{R})$. Il détermine même un unique groupe principal G caractérisé par le fait que ses générateurs sont à trace positive. Le groupe Γ est isomorphe au groupe G défini avec :

1/ Des générateurs
$$A_1, B_1, ..., A_g, B_g, E_1, ..., E_r, P_{r+1}, ..., P_n, H_1, ..., H_m$$
. 2/ Des relations

$$\prod_{i=1}^g [A_i,B_i]E_1...E_rP_{r+1}...P_nH_1...H_m=1, \ \forall i=1,...,r, \ E_i^{\upsilon_i}=\mathbf{1}_2.$$

Les matrices A_i et B_i sont hyperboliques. Les éléments $E_1, ..., E_r$, sont des éléments de torsion dans G. Ce sont des matrices elliptiques (0 < $tr(E_i)$ < 2) possédant un point fixe dans \mathcal{H} . Autour du point fixe de E_i l'action se fait localement par une matrice de rotation. Sur la surface de Riemann quotient, ceci donne un point de ramification de multiplicité v_i . La multiplicité du point cône correspondant est liée à l'angle au sommet de ce cône. Les éléments $P_{r+1},...,P_n$, sont paraboliques $(0 < tr(P_i) = 2)$ possédant un point fixe sur le bord de \mathcal{H} . Sur la surface de Riemann quotient, un tel point donne une piqûre. Les éléments $H_1, ..., H_m$, sont hyperboliques (2 < $tr(H_i)$) possédant une géodésique fixe dans \mathcal{H} . Sur la surface de Riemann quotient, une telle géodésique permet de définir un trou dont elle est le bord. On peut combler ce trou par un disque percé sans rien changer au support topologique, et en prolongeant seulement la surface de Riemann que l'on considére. Si cette opération est faite, la piqûre qui en résulte est l'image d'un point du bord de H dont on peut faire le tour avec une géodésique fermée invariante par la matrice H_i correspondante. Les deux derniers cas ne se produisent pas si l'on a affaire à une surface compacte. Dans tous les cas, on a $\mathcal{M} \simeq \mathcal{H}/G$.

Topologiquement, on voit bien que rien ne distingue les termes p_i et h_j dans la présentation de $\pi_1(\mathcal{M},*)$, alors que dans $SL(2,\mathbb{R})$ la représentation de ce groupe apporte du nouveau qui correspond à la structure conforme et se matérialise sur les valeurs des traces. On comprend aussi avec ces observations pourquoi on n'a pas eu à considérer de tore elliptique dans le chapitre précédent.

2.13. Le théorème de Poincaré. On trouve en [408] (Ch. 4) une réciproque partielle de ce que l'on vient de voir. Il s'agit du théorème de Poincaré qui indique que si $g \geq 0$, $r \geq 0$, $v_i \geq 2$ (pour i = 1, ..., r) sont des nombres entiers tels que l'on ait

$$2g - 2 + \sum_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{v_i}\right) > 0,$$

alors il existe un groupe fuchsien Γ ayant pour signature $(g; r: v_1, v_2, ..., v_r; 0)$. On dispose d'une construction explicite pour un tel groupe fuchsien dit géométriquement fini, c'est-à-dire possédant un domaine fondamental convexe polygonal à 4g+2r sommets délimité par un nombre fini de côtés portés par des géodésiques. Ce groupe admet une présentation à 2g+r générateurs et r+1 relations avec

- 1/ Les générateurs $\overline{A}_1, \overline{B}_1, ..., \overline{A}_q, \overline{B}_q, \overline{E}_1, ..., \overline{E}_r$.
- 2/ Les relations

$$\prod_{i=1}^{g} [\overline{A}_i, \overline{B}_i] \overline{E}_1 ... \overline{E}_r = 1, \quad \forall i = 1, ..., r, \quad \overline{E}_i^{v_i} = \mathbf{1}_2.$$

Le groupe Γ ne contient pas d'élément parabolique. Par construction son covolume est fini, et ce groupe est cocompact. En sens inverse pour tout groupe Γ ayant ces propriétés, la construction d'un domaine fondamental ayant les mêmes caractéristiques dans \mathcal{H} et associé à la surface $\mathcal{M} = \mathcal{H}/\Gamma$ est faisable par la méthode de [416]. Selon la façon dont est donné le groupe fuchsien, il peut s'avérer plus ou moins délicat de construire un domaine fondamental. Dans ce que l'on vient de voir on connaît des générateurs à partir desquels on travaille. Si le groupe est plutôt donné par des congruences dans $PSL(2,\mathbb{Z})$, d'autres méthodes existent dont certaines sont automatisées [805]. Par exemple le domaine fondamental d'un sousgroupe de congruence Γ de niveau n est contenu dans un domaine fondamental du groupe $\Gamma(n)$ identifié dans [451]. Certains groupes fuchsiens ne sont pas des groupes de congruence ([467] p. 253).

Dans [408] la méthode de construction de Poincaré est étendue à un groupe fuchsien de signature $(g; n: v_1, v_2, ..., v_r, \infty, ..., \infty; m)$. Ceci donne la possibilité de construire un groupe fuchsien de première espèce avec des éléments paraboliques $P_{r+1}, ..., P_n$. Ce cas généralise celui des tores percés conformes paraboliques qui sont de signature $(1; 1: \infty; 1)$. Il existe une infinité de tels tores percés non conformément équivalents, alors que la construction de [408] n'en fournit qu'un. Pour les autres signatures le même constat peut être fait, avec des domaines fondamentaux différents donnant des surfaces non conformément équivalentes, mais qui sont topologiquement identiques. Ceci signifie que la construction de Poincaré peut être généralisée, par exemple en ne plaçant plus le centre du polygone exhibé au centre du disque unité.

Le théorème de Poincaré est encore étendu dans l'énoncé que l'on trouve dans [47] (p. 268) indiquant qu'il existe un groupe fuchsien Γ de type fini, non élémentaire,

et de signature $(g; n: v_1, v_2, ..., v_r, v_{r+1}, ..., v_n; m)$ si et seulement si on a la condition pour la caractéristique d'Euler-Poincaré :

$$-\chi(\Gamma) = 2g - 2 + \sum_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{v_i}\right) + (n-r) + m > 0.$$

L'expression de cette caractéristique d'Euler-Poincaré peut être minorée par la valeur positive (1/42) qui correspond au groupe de Hurwitz à trois générateurs elliptiques $\overline{E}_1, \overline{E}_2, \overline{E}_3$, tels que $\overline{E}_1^2 = \overline{E}_2^3 = \overline{E}_3^7 = 1$. Cette observation permet d'établir le théorème de Hurwitz ([253] p. 258) indiquant que le groupe $Aut(\mathcal{M})$ des automorphismes conformes d'une surface de Riemann compacte \mathcal{M} de genre $g \geq 2$ est fini et majoré par $42 \times (2g-2) = 84(g-1)$. Ceci donne aussi le théorème de Schwarz ([253] p. 258), disant que si \mathcal{M} est de genre $g \geq 2$, alors $Aut(\mathcal{M})$ est un groupe fini.

2.14. Groupes de Coxeter associés. Pour un groupe fuchsien Γ que l'on suppose ici pour simplifier de signature $(g; r: v_1, v_2, ..., v_r; 0)$, on peut introduire ([408] p.93) un polygone hyperbolique à 4g + 2r côtés orientés dont les sommets s_j sont indexés cycliquement, et dont les angles aux sommets sont tous calculables en fonction de la signature de Γ . On peut alors considérer le groupe Γ^* de toutes les isométries de \mathcal{H} laissant invariant les côtés de ce polygone. Il est engendré par les réflexions σ_j (j=1,...,4g+2r) de \mathcal{H} par rapport aux côtés $s_j s_{j+1}$ du domaine fondamental polygonal de Γ . En notant $(2\pi/2\nu_j)$ l'angle au sommet s_j , on obtient ([454] p.135) les relations $\sigma_j^2 = 1$ et $(\sigma_{j-1}\sigma_j)^{\nu_j} = 1$. Tous les coefficients ν_j sont faciles à expliciter en fonction de la signature du groupe Γ ou de son groupe principal G. Les reflexions retournant les angles, ceci introduit un groupe d'isométries non toutes directes de \mathcal{H} :

$$\Gamma^* = <\sigma_1, ..., \sigma_{4q+2r} \mid \sigma_i^2 = 1, \ (\sigma_{i-1}\sigma_i)^{\nu_i} = 1 > .$$

Ce groupe agit proprement dans \mathcal{H} , ce qui signifie que pour tout sous-ensemble compact \mathcal{C} de \mathcal{H} l'ensemble des éléments $\gamma \in \Gamma^*$ tels que $\gamma \mathcal{C} \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$ est fini. L'intérieur du polygone de départ constitue un domaine fondamental pour cette action. Le groupe Γ^* est un groupe de Coxeter [86] qui permet d'expliciter le lien avec la théorie de immeubles de Tits, ici des immeubles hyperboliques ([678]). Dans Γ^* on retrouve Γ comme sous-groupe d'indice 2 des transformations qui conservent l'orientation ([408] théorème 3.5.4). Ceci donne comme quotient \mathcal{H}/Γ une surface de Riemann compacte de genre g où le polygone construit précédemment se projette en un complexe à r+1 sommets reliés par 2g+r géodésiques tracées sur la surface considérée. Ce complexe permet de calculer l'homologie singulière de la surface. Il correspond à une dissection canonique de la surface de Riemann.

2.15. Groupes de triangle hyperboliques. Avec g=0 et n=r=3, ce qui précède garantit l'existence d'un groupe de Coxeter $\mathbf{T}^*(v_1,v_2,v_3)$ définissable avec trois réflexions $\overline{R}_1,\overline{R}_2,\overline{R}_3$ sur les cotés d'un triangle géodésique de $\mathcal H$ pourvu que

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{v_i} < 1.$$

Ce groupe $\mathbf{T}^*(v_1, v_2, v_3)$ appelé groupe de triangle hyperbolique a pour présentation

$$<\overline{R}_1,\overline{R}_2,\overline{R}_3\mid \overline{R}_1^2=\overline{R}_2^2=\overline{R}_3^2=(\overline{R}_1\overline{R}_2)^{\upsilon_3}=(\overline{R}_2\overline{R}_3)^{\upsilon_1}=(\overline{R}_3\overline{R}_1)^{\upsilon_2}=1>.$$

Il possède un sous-groupe, le groupe de von Dyck, qui peut être vu ([408] p. 99-102) comme fuchsien d'indice 2 de signature $(0; 3: v_1, v_2, v_3; 0):$

$$\mathbf{T}(v_1, v_2, v_3) = \langle \overline{E}_1, \overline{E}_2 \mid \overline{E}_1^{v_1} = \overline{E}_2^{v_2} = (\overline{E}_1 \overline{E}_2)^{v_3} = 1 \rangle$$

$$= \langle \overline{E}_1, \overline{E}_2, \overline{E}_3 \mid \overline{E}_1^{v_1} = \overline{E}_2^{v_2} = \overline{E}_3^{v_3} = \overline{E}_1 \overline{E}_2 \overline{E}_3 = 1 \rangle.$$

On trouve $\mathbf{T}(2,3,\infty) = PSL(2,\mathbb{Z}) = \Gamma(1)$ parmi les groupes de Dyck. Tout groupe de triangle est un quotient du groupe utilisé dans la résolution de nos équations et qui peut lui-même être considéré comme un groupe de Coxeter [131]

$$\mathbf{T}_3 \cong \mathbf{T}^*(\infty, \infty, \infty) = \mathbf{C}_2 * \mathbf{C}_2 * \mathbf{C}_2.$$

Dans \mathbf{T}_3 , le sous-groupe $\mathbf{F}_2 \simeq [PSL(2,\mathbb{Z}), PSL(2,\mathbb{Z})]$ d'indice 2 peut être vu comme le groupe fuchsien qui construit la théorie de Markoff classique. Les groupes de Dyck sont sphériques, euclidiens ou hyperboliques, selon que le nombre suivant est plus grand, égal ou plus petit que 1 :

$$\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3}$$
.

Les groupes de Dyck donnent concrètement le passage entre les travaux développés dans le présent ouvrage et la théorie des singularités [29] [601] [548] [59] [353] [216] [455] [461]. La condition de réduction présentée dans [695] pour les systèmes de poids réguliers et les singularités de surfaces associées est comparable à celle vue au chapitre précédent pour les tores paraboliques. Un système régulier de poids est un quadruplet d'entiers positifs (t, x, y, z) tels que $t > m = \max(x, y, z)$ et

$$\frac{(q^t-q^x)(q^t-q^y)(q^t-q^z)}{(1-q^x)(1-q^y)(1-q^z)} \text{ polynôme en } q.$$

On peut lui associer une singularité à l'origine d'une surface définie par un polynôme

$$\sum_{xi+yj+zk=t} a_{ijk} X^i Y^j Z^k.$$

On associe à un tel système un sous-groupe discret agissant sur \mathcal{H} , \mathbb{C} , \mathcal{S}^2 . On trouve dans [695] comment se fait le lien avec des groupes fuchsiens et des surfaces K_3 lorsque l'on est dans le cas hyperbolique où t-x-y-z=1>0, et dans [596] (p. 665) une évocation due à I. I. Piatetsky-Shapiro et I. R. Shafarevich du lien entre les surfaces réelles K_3 et les groupes de réflexion hyperbolique. On indique aussi dans [695] (p. 499 table 4) comment se fait le lien avec des surfaces rationnelles, les groupes kleinéens et les systèmes de racines A-D-E lorsque l'on est dans le cas sphérique où t-x-y-z=-1<0. On trouve ainsi les sous-groupes finis du groupe SU(2) des matrices unitaires de $SL(2,\mathbb{C})$, revêtement universel du groupe SO(3) des rotations de l'espace euclidien. Ceci donne les groupes de rotations \mathbf{C}_{l+1} , \mathbf{D}_{l-2} , \mathbf{A}_4 , \mathbf{S}_4 , \mathbf{A}_5 , des polyèdres platoniciens (pyramide, bipyramide, tétraèdre, cube ou octaèdre, icosaèdre ou dodécaèdre), avec les groupes simples associés par la correspondance de McKay ([167] p. 297, [38], [754]) et les polynômes correspondants [29] (Tome 1 p. 139) :

$$\begin{array}{lll} A(l) = \mathbf{T}(1,1,l+1) & \text{cyclique d'ordre } l+1 \geq 2 & XZ + Y^{l+1} \\ D(l) = \mathbf{T}(2,2,l-2) & \text{diédral d'ordre } 4(l-2) \geq 8 & X^2Y + Y^{l-1} + Z^2 \\ E(6) = \mathbf{T}(2,3,3) & \text{tétraèdral binaire } (\to Fi_{24}) & X^2 + Y^3 + Z^4 \\ E(7) = \mathbf{T}(2,3,4) & \text{octaèdral binaire } (\to B = F_{2+}) & X^2 + Y^3 + YZ^3 \\ E(8) = \mathbf{T}(2,3,5) & \text{icosaèdral binaire } (\to M) & X^2 + Y^3 + Z^5 \end{array}$$

On obtient ainsi les groupes de Dyck sphériques que l'on peut voir comme sousgroupes finis Γ de $PSL(2,\mathbb{C})$ agissant de manière discontinue sur S^2 , définissant les cinq polyèdres réguliers des pavages classiques de la sphère (voir [61] tome 1 p. 44). Ils correspondent aux singularités simples ou de Klein [429] [754] [755] [31] (p.26), et aux diagrammes de Dynkin sans double liens [86] (Ch. VI § 4 th. 3 p. 197) des groupes de Coxeter associés à la résolution de ces singularités. Déjà identifiés dans la scholie de la proposition 18 du livre XIII des Elements d'Euclide, évoqués dans le Timée de Platon, ils ont été mis à contribution en 1621 dans le Secret du Monde par Jean Kepler pour justifier le système héliocentrique qui a été proposé en 1543 par N. Copernic dans son livre des Révolutions...

Bien que les surfaces $M^{s_1s_2}(b,\partial K,u)$ mises en évidence dans les chapitres antérieurs soient rationnelles et essentiellement sans singularité, il est intéressant de constater que les types de singularités isolées possibles sur les surfaces cubiques sont connus. On trouve notamment le point conique elliptique correspondant au diagramme de Dynkin E(6) et à la forme normale du cas euclidien où t-x-y-z=1>0 qui est l'équation $XY^2-4Z^3+g_2X^2Y+g_3X^3$ d'une surface elliptique ([272] p.182). Les autres possibilités [263] correspondent à des points doubles rationnels (des singularités de Klein) et sont données par A(l) où l=1,...,5; D(l) où l=4,5; E(6).

2.16. Jacobienne et fonctions thêta. En se limitant encore à une surface \mathcal{H}/Γ de signature $(g; r: v_1, v_2, ..., v_r; 0)$ le polygone bord du domaine fondamental que l'on vient de mettre en évidence s'appelle une dissection canonique de la surface. Il permet de reconstruire la surface par des transformations successives de son domaine fondamental. Pour une surface \mathcal{M} de genre g supposée ici compacte, on fait apparaître ainsi 2g cycles $\alpha_1,...,\alpha_{2g}$ avec lesquels les différentielles holomorphes $\omega_1,...,\omega_g$, de la surface donnent une matrice de périodes

$$\Omega = [\pi_{jk}] = \left[\int_{\Omega_k} \omega_j \right], \ j = 1, ..., g, \ k = 1, ..., 2g.$$

Ses 2g vecteurs colonnes $(\pi_{jk})_{k=1,...,2g}$ donnent un sous-groupe discret de périodes Λ de rang g de \mathbb{C}^g définissant la surface jacobienne $Jac(\mathcal{M}) = \mathbb{C}^g/\Lambda$ de \mathcal{M} . On a de plus un plongement canonique généralisant la situation déjà rencontrée pour les courbes elliptiques :

$$\kappa : u \in \mathcal{M} \longmapsto \kappa(u) = (\int_{u_0}^u \omega_j)_{j=1,\dots g} \in Jac(\mathcal{M}).$$

Chaque intégrale de cette application dite de Jacobi (ou Kodaira) est mal définie car elle dépend du chemin d'intégration. Mais le g-uplet est quant à lui bien défini. On peut faire en sorte d'avoir $\alpha_1 = a_1, ..., \alpha_g = a_g, \alpha_{g+1} = b_1, ..., b_g$, et $\pi_{jk} = \delta_{jk}$ pour k = 1, ..., g, et poser avec une matrice \mathbf{M} :

$$\mathbf{M} = \left[\int_{b_k} \omega_j \right], \ j = 1, ..., g, \ k = 1, ..., g,$$
$$\Lambda - \mathbb{Z}^g \cap \mathbf{M}\mathbb{Z}^g$$

On vérifie que l'on a $\mathbf{M} = {}^{t}\mathbf{M}$ et $\operatorname{Im}(\mathbf{M}) > 0$, et ces deux conditions caractérisent le demi-espace supérieur de Siegel \mathcal{H}_{g} sur lequel on peut faire agir de façon naturelle le groupe symplectique $Sp(g,\mathbb{Z})$. L'intérêt de cette construction est que la surface

jacobienne peut elle-même être plongée au moyen d'une fonction thêta dans un espace projectif $\mathbf{P}^n(\mathbb{C})$ lorsqu'elle admet une polarisation. Il s'agit d'une forme hermitienne H définie sur $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$ telle que $\Im(H)$ soit à valeurs entières sur le réseau Λ . La surface jacobienne devient alors un groupe algébrique. Ceci est la conséquence d'un résultat de Lefschetz [452] [823] p. 192. Ce résultat plonge de façon naturelle toute surface de Riemann compacte dans un tel espace projectif, réalisant de façon concrète le plongement donné par les théorèmes de Chow ou Kodaira ([314] p. 167 ou p. 181 [732] p.29-30). Cette construction permet de représenter le groupe des automorphismes $Aut(\mathcal{M})$ par un monomorphisme naturel dans le groupe $Sp(g,\mathbb{Z})$ qui contient ainsi une information essentielle ([253] p. 287). La fonction thêta correspondante s'écrit pour $u \in \mathbb{C}^g$ et $\mathbf{M} \in \mathcal{H}_q$

$$\theta(u, \mathbf{M}) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^g} \exp(\pi i (t^t m) \mathbf{M} m + 2\pi i (t^t m) u).$$

La surface jacobienne $Jac(\mathcal{M})$ est une variété abélienne ([400], [23] tome 3 §24.2) sur laquelle on dispose d'une polarisation canonique ([531] p. 311 [823] p. 206). On peut caractériser les variétés abéliennes qui possèdent une polarisation. Ce sont des variétés algébriques projectives que l'on peut munir d'une loi de groupe algébrique définie avec des polynômes homogènes et deux applications $\mathcal{M} \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ et $\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ qui s'écrivent comme des fonctions rationnelles à coefficients dans le corps $\mathcal{K}(\mathcal{M})$ des fonctions méromorphes définies sur \mathcal{M} . Un résultat remarquable dû à T. Shioda est que les variétés jacobiennes sont caractérisées par des solitons, solutions de l'équation de Kadomtsev-Petviashvili de la théorie des plasmas ([740]). Il existe aussi des tores de dimension 2 sans plongement projectif ([735] p.351-356), et qui ne sont donc pas des variétés abéliennes.

2.17. Fonctions automorphes. On définit un facteur d'automorphie μ associé au groupe fuchsien $\Gamma \subset Aut(\mathcal{H})$ avec :

$$\mu: \Gamma \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C},$$

$$\forall \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma, \ \forall z \in \mathcal{H}, \ \mu(\gamma_1 \gamma_2, z) = \mu(\gamma_1, \gamma_2 z) \mu(\gamma_2, z).$$

$$\forall \gamma \in \Gamma, \ \mu(\gamma, .) \text{ holomorphe non nulle sur } \mathcal{H}.$$

Une fonction automorphe f du groupe fuchsien Γ et de facteur d'automorphie μ est une fonction définie sur \mathcal{H} , souvent supposée méromorphe, telle que

$$\forall \gamma \in \Gamma, \ \forall z \in \mathcal{H}, \ f(\gamma z) = \mu(\gamma, z) f(z).$$

Une fonction automorphe est parfois dite modulaire. Mais l'auteur préfère réserver à ce dernier mot un sens plus précis destiné à étudier des situations plus générales ([404] p.257). Si μ est constante et égale à 1, on dit simplement ici que f est une fonction Γ -automorphe. Il s'agit d'une fonction définie sur \mathcal{H} mais par une simple fonction définie sur $\mathcal{M} = \mathcal{H}/\Gamma$ que l'on compose avec la projection canonique de \mathcal{H} sur \mathcal{H}/Γ . Tout automorphisme $\gamma \in \Gamma \subset Aut(\mathcal{H})$ du demi-plan \mathcal{H} peut être considéré localement comme une fonction holomorphe permettant de définir

$$\mu_{\gamma} = \frac{\partial \gamma}{\partial z}, \ \mu_{\gamma}(z)^{-1} = \mu(\gamma, z).$$

Si F définie sur $\mathcal H$ est invariante par $\gamma\in\Gamma\subset Aut(\mathcal H)\simeq PSL(2,\mathbb R),$ considérons l'expression associée

$$F(\gamma z) = F(\frac{az+b}{cz+d}) = F(z).$$

Lorsque dériver F en z est possible, on obtient une fonction f=F' qui est Γ -automorphe et dont le facteur d'automorphie est donné par :

$$f(\gamma z) = f(\frac{az+b}{cz+d}) = (cz+d)^2 f(z) = \mu(\gamma, z) f(z).$$

Avec des dérivées d'ordre supérieur, on doit introduire la dérivation de Schwarz ([264] p. 99) pour trouver d'autres formules de ce type. On peut montrer que les facteurs d'automorphie les plus généraux s'écrivent ([322] p. 19) avec 2k entier non négatif $\mu(\gamma, z) = (cz + d)^{2k}$. Ceci définit les fonctions Γ -automorphes de poids 2k. Ces fonctions permettent la définition des formes différentielles de degré k, dites encore k-différentielles ou formes automorphes $f \longrightarrow f(z)dz^k$. Ces formes sont dites holomorphes si f est holomorphe ([253] p. 51 et 87). De telles formes permettent de considérer le k-ième \mathbb{C} -espace de cohomologie $H^k(\mathcal{M}, \mathbb{C})$ ainsi que l'algèbre commutative graduée ([253] p. 269)

$$H^*(\mathcal{M}, \mathbb{C}) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} H^k(\mathcal{M}, \mathbb{C}).$$

Elles permettent l'étude des aspects différentiels de la surface $\mathcal{M} = \mathcal{H}/\Gamma$ et de sa théorie de Hodge [479]. Il y a aussi un lien avec la théorie des représentations, la théorie du corps de classe et le programme de Langlands ([104] [58] [358] [669] [286]). Les fonctions Γ -automorphes de poids 2k qui sont holomorphes sur \mathcal{H} définissent de leur côté un \mathbb{C} -espace vectoriel $\mathbf{M}_k(\Gamma)$ puis, en désignant l'espace 0 par cette écriture si k < 0, une algèbre graduée somme directe ([729] p.145)

$$\mathbf{M}(\Gamma) = \bigoplus_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{M}_k(\Gamma).$$

Cette algèbre a un lien avec l'algèbre des fonctions méromorphes $\mathcal{K}(\mathcal{M})$ évoquée ci-dessus sur la surface de Riemann $\mathcal{M}=\mathcal{H}/\Gamma$. On trouve dans [224] (p.75) une démonstration du fait que si Γ est un sous-groupe d'indice fini de $PSL(2,\mathbb{Z})$ l'algèbre $\mathbf{M}(\Gamma)$ est de type fini sur \mathbb{C} , tous les espaces $\mathbf{M}_k(\Gamma)$ étant de dimension finie. Pour le groupe $PSL(2,\mathbb{Z})$, on trouve dans la même référence, ou dans [729] (p.145) l'isomorphisme de $\mathbf{M}(PSL(2,\mathbb{Z}))$ et de l'algèbre de polynômes $\mathbb{C}[X,Y]$. Pour un groupe fuchsien plus général Γ tel que $\mathcal{M}=\mathcal{H}/\Gamma$ soit une surface compacte le corps des fractions de $\mathbf{M}(\Gamma)$ est une extension $\mathcal{K}(\mathcal{M})$ de degré fini du corps des fractions $\mathbb{C}(X,Y)$ de $\mathbb{C}[X,Y]$. En pratique ceci se traduit par le fait que deux fonctions Γ -automorphes ayant même domaine de définition sont liées par une relation algébrique. Une conséquence importante ([264] p.163) est que toute fonction automorphe $f(\tau)$ d'un groupe fuchsien ayant pour domaine fondamental une région constituée de k copies du domaine fondamental de $PSL(2,\mathbb{Z})$ donne avec un polynome Φ de degré inférieur ou égal à k une relation algébrique $\Phi(f,J)=0$ où J est l'invariant modulaire.

3. La théorie de Teichmüller généralisant celle de Markoff

Le problème central de la théorie de Teichmüller consiste à décrire les différentes structures conformes qui existent sur un même support topologique \mathcal{M}_{top} d'une surface de Riemann \mathcal{M} supposée ici connexe et de type fini. Le groupe de Poincaré sur \mathcal{M}_{top} pointé est noté $\pi_1(\mathcal{M}_{top}, *)$. Classiquement la théorie de Teichmuller est présentée avec tout un appareillage différentiel. Or on peut la présenter de façon

quasi algébrique lorsque \mathcal{H} est le revêtement conforme de la surface \mathcal{M} . Ceci a permis d'expliciter comment elle généralise la théorie de Markoff. Le formalisme mis au point sur les tores percés conformes a ainsi été étendu pour tout groupe fuchsien de signature s, permettant une approche très globale applicable à d'autres équations diophantiennes. Ceci a débouché sur des questions géométriques nouvelles dans la perspective de sortir des surfaces pour appréhender des objets plus compliqués sur lesquels généraliser les méthodes qui précèdent. Les domaines de Riemann semblent particulièrement bien adaptés à tel projet pour des raisons que l'on explique. On décrit maintenant comment ces réflexions ont été développées, en renvoyant au chapitre 7 de [632] pour des compléments ainsi qu'à [720] [330] [706] [449].

3.1. Représentations du groupe de Poincaré. Les différentes structures conformes sur \mathcal{M}_{top} sont définies par les représentations $\overline{\rho}$ du groupe $\pi_1(\mathcal{M}_{top}, *)$ dans le groupe $PSL(2, \mathbb{R})$, constituant l'espace des déformations

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}(\pi_1(\mathcal{M}_{top}, *), PSL(2, \mathbb{R})).$$

Au moyen de la notion de groupe principal, le calcul d'une déformation $\overline{\rho}$ de signature $s = (g; n : v_1, v_2, ..., v_r, v_{r+1}, ..., v_n; m)$ est faisable analytiquement avec la représentation associée $\rho: \pi_1(\mathcal{M}_{top}, *) \to SL(2, \mathbb{R})$ telle que $\overline{\rho} = P \circ \rho$. Il suffit d'expliciter les coefficients des matrices images par ρ des générateurs qui vérifient les relations d'une présentation de $\pi_1(\mathcal{M}_{top}, *)$. Le calcul des générateurs $\rho(a_1) = A_1$, $\rho(b_1) = B_1, ..., \rho(a_g) = A_g, \rho(b_g) = B_g, \rho(e_1) = E_1, ..., \rho(e_r) = E_r, \rho(p_{r+1}) = P_{r+1},$..., $\rho(p_n) = P_n$, $\rho(h_1) = H_1$, ..., $\rho(h_m) = H_m$ nécessite 3(2g+n+m) paramètres réels car on a quatre paramètres pour chacune des matrices et que leurs déterminants valent 1. On doit prendre en compte entre ces paramètres 3(r+1) égalités entre nombres réels issus des relations qui lient les matrices, ainsi que les n-r égalités $tr(P_i) = 2$. Ceci représente au total n + 2r + 3 contraintes liant ces paramètres réels. Trois paramètres supplémentaires peuvent être éliminés en raisonnant à un automorphisme intérieur près, c'est-à-dire à une transformation conforme près de \mathcal{H} . Ceci construit une variété réelle V_s de dimension 6g-6-2r+2n+3m dont une partie définie par les contraintes sur les traces supérieures à 2 paramétrise les structures de Riemann possibles sur le support topologique de \mathcal{M}_{top} . Chaque point noté $\Pi(\overline{\rho})$ dans cette partie de \mathcal{V}_s correspond à une structure conforme sur \mathcal{M}_{top} . Par exemple, pour les tores percés paraboliques g = 1, r = 0, n = 1, m = 0, on a mis en évidence au chapitre précédent la nappe principale d'une variété $\mathcal{V}_{(1:1:0)}$ de dimension 2 donnée par l'équation de Markoff. Et pour un tore percé hyperbolique $g=1,\,r=0,$ n=0, m=1, on trouve de même une partie d'une variété de dimension 3. On trouve dans [419] d'autres exemples. Du groupe principal $\rho(\pi_1(\mathcal{M}_{top}, *)) = G$ on déduit alors la représentation associée $\overline{\rho} = P \circ \rho$ et son image $\Gamma = PG = \overline{\rho}(\pi_1(\mathcal{M}_{top}, *))$ qui est un groupe fuchsien de signature $s=(g;n:v_1,v_2,...,v_r,v_{r+1},...,v_n;m)$. On peut pratiquement considérer qu'à chaque point $\Pi(\overline{\rho})$ de \mathcal{V}_s est attaché le groupe fuchsien Γ , point que l'on peut noter avec les matrices du groupe principal G de Γ et par analogie avec ce que l'on a développé dans [632] :

$$\Pi(A_1, B_1, ..., A_a, B_a, E_1, ..., E_r, P_{r+1}, ..., P_n, H_1, ..., H_m).$$

Le calcul que l'on vient de faire ne détermine pas tout l'espace des déformations de $\pi_1(\mathcal{M}_{top}, *)$, mais uniquement son sous-ensemble $\mathcal{R}_s = \mathcal{R}_s(\pi_1(\mathcal{M}_{top}, *), PSL(2, \mathbb{R}))$. Il faut regrouper ces derniers espaces sur toutes les signatures correspondant au même type topologique (g, n + m) de $\pi_1(\mathcal{M}_{top}, *)$ pour retrouver \mathcal{R} . Comme le

montre les tores percés paraboliques et hyperboliques, on trouve des phénomènes de bord entre les espaces \mathcal{R}_s correspondant aux sauts quantiques que constituent pour la géométrie conforme le passage d'une piqûre à un trou. Pour tout $\overline{\rho} \in \mathcal{R}$ une structure conforme est donnée par la considération de :

$$\mathcal{M} = \mathcal{H}/\overline{\rho}(\pi_1(\mathcal{M}_{top}, *)) = \mathcal{H}/\Gamma.$$

Il s'agit d'une surface de Riemann qui selon les propriétés de $\overline{\rho}$ peut avoir pour support topologique \mathcal{M}_{top} et une signature ou une autre. On remarquera que des espaces topologiques homéotopes définissent des groupes de Poincaré isomorphes, mais peuvent ne pas être homéomorphes ([308] p.16) mais qu'inversement la dernière égalité privilégie un modèle \mathcal{M}_{top} parmi les classes d'homéomorphie d'une même classe d'homéotopie.

3.2. Equivalence des représentations et réduction. Si $Int(PSL(2,\mathbb{R}))$ est le groupe des automorphismes intérieurs de $PSL(2,\mathbb{R})$, on a avec la composition des morphismes une action naturelle de ce groupe dans \mathcal{R}_s . Ceci permet de cacher différents paramètres liés à ces automorphismes intérieurs et donc de raisonner à équivalence conforme près de \mathcal{H} . On définit ([720] p. 165) ainsi un quotient qui est l'espace des modules de signature s:

$$\mathcal{M}od(s) = \mathcal{R}_s(\pi_1(\mathcal{M}_{top}, *), PSL(2, \mathbb{R}))/Int(PSL(2, \mathbb{R})).$$

Comme la variété réelle \mathcal{V}_s à laquelle il s'identifie par le calcul précédent, cet espace paramétrise les structures conformes de signature s existant sur la surface topologique \mathcal{M}_{top} support. Compte tenu de la façon dont on l'a construit, remarquons que sur \mathcal{V}_s il est naturel de considérer les automorphismes intérieurs définis par une matrice $D \in GL(2,\mathbb{R})$. Ceci fait alors intervenir l'orientation de \mathcal{M} et donne un résultat analogue à [632] (prop. 5.5.3 et prop. 6.5.3). De façon précise, on a l'équivalence entre l'égalité de

$$\Pi(A_1, B_1, ..., A_g, B_g, E_1, ..., E_r, P_{r+1}, ..., P_n, H_1, ..., H_m),$$

$$\Pi(A'_1, B'_1, ..., A'_g, B'_g, E'_1, ..., E'_r, P'_{r+1}, ..., P'_n, H'_1, ..., H'_m),$$

et l'existence de $D \in GL(2,\mathbb{R})$ telle que

$$A_1' = DA_1D^{-1}, ..., E_1' = DE_1D^{-1}, ..., P_{r+1}' = DP_{r+1}D^{-1}, ..., H_m' = DH_mD^{-1}.$$

La partie de \mathcal{V}_s mise en évidence ci-dessus est invariante pour l'action des automorphismes intérieurs définis par les matrices $D \in GL(2,\mathbb{R})$. Le calcul de toutes les possibilités pour D débouche sur des considérations sur les quaternions ou les algèbres de Clifford qui les généralisent. Egalement, puisque les calculs faits ont utilisé des représentations $\rho: \pi_1(\mathcal{M}_{top}, *) \to SL(2,\mathbb{R})$, c'est-à-dire des représentations de groupe spéciales $\rho: \pi_1(\mathcal{M}_{top}, *) \to GL(2,\mathbb{R})$, on peut utiliser les résultats de cette théorie dans l'étude de la situation que l'on considère, avec le fait qu'en général $\pi_1(\mathcal{M}_{top}, *)$ est infini et non commutatif. On fait ainsi le lien avec la notion de caractère qui, en sens inverse s'introduit dans la théorie de Teichmuller, par exemple avec la notion de caractère de Fricke. L'équation algébrique associée se retrouve par les méthodes de [364]. Le lien avec les formes quadratiques binaires peut être retrouvé en généralisant le théorème de Frobenius Schur ([734] p. 121).

Il est aussi possible de faire agir de façon naturelle le groupe des automorphismes $Aut(\pi_1(\mathcal{M}_{top},*))$ sur \mathcal{R}_s , ce qui revient à changer de système de générateurs du groupe $\pi_1(\mathcal{M}_{top},*)$. Comme l'action induite d'un élément de $Int(\pi_1(\mathcal{M}_{top},*))$

sur \mathcal{R}_s donne l'identité, on peut se contenter d'étudier l'action sur \mathcal{R}_s du groupe des classes d'applications

$$\Gamma_{\pi_1(\mathcal{M}_{top},*)} = Aut(\pi_1(\mathcal{M}_{top},*))/Int(\pi_1(\mathcal{M}_{top},*)) = Out(\pi_1(\mathcal{M}_{top},*)).$$

Cette démarche généralise la théorie de la réduction qui a été vue au chapitre précédent. Elle définit l'espace de Teichmuller :

$$Teich(s) = \mathcal{M}od(s)/\Gamma_{\pi_1(\mathcal{M}_{top},*)}.$$

Il est identifiable à la partie de \mathcal{V}_s mise en évidence ci-dessus que l'on peut maintenant interpréter comme domaine fondamental pour l'action du groupe $\Gamma_{\pi_1(\mathcal{M}_{top},*)}$ dans toute la variété réelle \mathcal{V}_s .

3.3. Groupes fuchsiens arithmétiques. La question se pose de savoir si l'on peut remplacer dans ce que l'on vient de voir le groupe $PSL(2,\mathbb{R})$ par $PSL(2,\mathbb{Z})$. La réponse non évidente est partiellement donnée dans le chapitre 5 de [408]. Elle conduit à se méfier de la dénomination de groupe fuchsien arithmétique utilisée également dans le contexte des groupes de Lie, et différente de la notion envisagée ici qui se résume à la condition $\Gamma \subset PSL(2,\mathbb{Z})$.

3.4. Compléments sur les représentations de groupes.

3.4.1. Variété de représentations. On peut aussi vouloir remplacer $PSL(2,\mathbb{R})$ par $PSL(2,\mathbb{C})$, et raisonner sur des groupes kleinéens plutôt que sur des groupes fuchsiens. Ceci conduit à la notion de variété de représentations d'un groupe de Poincaré [492] [99]

$$\rho \in \mathcal{R}(\pi_1(\mathcal{M}_{ton}, *), PSL(2, \mathbb{C})) \to (tr\rho(g_1), tr\rho(g_2), ..., tr\rho(g_n)) \in \mathbb{C}^p,$$

où $\rho: \pi_1(\mathcal{M}_{top}, *) \to PSL(2, \mathbb{C})$ représentation de $\pi_1(\mathcal{M}_{top}, *)$ dans $PSL(2, \mathbb{C})$, avec p nombre de générateurs choisis dans le groupe $\pi_1(\mathcal{M}_{ton}, *)$, tr la trace dans $PSL(2,\mathbb{C})$ à distinguer de la trace de la matrice correspondante dans $SL(2,\mathbb{C})$. L'ensemble des représentations complexes ρ est $\mathcal{R}(\pi_1(\mathcal{M}_{top}, *), PSL(2, \mathbb{C}))$. Ce nouveau sujet est lui-même lié à l'étude de l'espace de Teichmüller qu'il complexifie [720] (ch. 4). On construit de façon naturelle des relations algébriques entre les traces en utilisant la méthode de [364] [658], d'où des variétés autour des caractères de Fricke dans lesquelles on peut représenter l'espace de Teichmüller [66]. La méthode donne des structures algébriques qui généralisent également la théorie de Markoff [302] [692] [693] [494]. Le procédé peut d'ailleurs être comparé à la méthode utilisée pour montrer que les surfaces de Riemann compactes sont algébriques ([149] (p. 120) [578] (p.98) [732] [498]). Le lien est aussi faisable avec la classique théorie des invariants ([348] [219] [487]), puis les algèbres de Hopf, la théorie de Galois et les groupes quantiques ([63] [133] (p. 52) [199] [321]). On a aussi un lien profond avec le calcul de Heaviside (encore appelé ombral, symbolique, de Sylvester, de Boole, de Leibnitz..., [370] [683] [684]) qui a donné naissance aux distributions par généralisation de la fonction de Dirac ([335] [115] [708] [154] [118]). L'approfondissement de ce sujet conduit au calcul différentiel non commutatif [199], aux D-modules ([170] [68] (p. 14)), etc. Il constitue une perspective essentielle pour des travaux à venir.

3.4.2. *Monodromie*. On appelle représentation de monodromie d'un groupe $\Gamma = \pi_1(\mathcal{M}_{ton}, *)$ tout homomorphisme de groupes

$$\rho: \pi_1(\mathcal{M}_{top}, *) \longrightarrow GL(n, \mathbb{C}).$$

L'image de ρ est le groupe de monodromie. Ces représentations peuvent être classées avec les automorphismes intérieurs de $GL(n,\mathbb{C})$ et interviennent dans la résolution des équations différentielles de Fuchs ([859] p. 75, [312], [450]) qui sont de forme suivante où les a_i sont holomorphes, ou encore méromorphes dans le domaine considéré :

$$\frac{d^n f}{dz^n} + a_1(z) \frac{d^{n-1} f}{dz^{n-1}} + \dots + a_n(z) f = 0.$$

- \bullet Pour le cas plus général où n n'est pas nécessairement égal à 2, ce qui précède conduit à l'étude des groupes algébriques et à la théorie de Galois différentielle de Picard-Vessiot, Ritt, Kolchin, Pommaret, etc... On renvoie pour l'approfondissement de ce sujet à [68] [860].
- Pour le cas n=2 et $\pi_1(\mathcal{M}_{top},*)\simeq \mathbf{F}_2$ engendré par A et B, les représentations de monodromie sont complètement décrites dans [859] (p. 80). Celles qui sont irréductibles, c'est-à-dire sans sous espace propre invariant, sont caractérisées à un automorphisme intérieur près de $GL(2,\mathbb{C})$ par des expressions

$$\rho(A) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \ \rho(B) = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ (\nu_1 + \nu_2) - (\lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2) & \mu_2 \end{bmatrix}, \ \lambda_i \mu_j \neq \nu_k.$$

Elles sont déterminées de façon unique par les trois couples (λ_1, λ_2) , (μ_1, μ_2) , (ν_1, ν_2) de valeurs propres de A, B et AB, pourvu qu'ils vérifient les contraintes citées. Par exemple en diagonalisant les matrices A_0 et B_0 de la théorie de Markoff classique, on vérifie que les contraintes sont vérifiées et que l'on a :

$$\rho(A_0) = \begin{bmatrix} \frac{3-\sqrt{5}}{2} & 1\\ 0 & \frac{3+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}, \ \rho(B_0) = \begin{bmatrix} \frac{3-\sqrt{5}}{2} & 0\\ -4 & \frac{3+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}.$$

On peut expliciter dans ce cas une solution du problème de Riemann-Hilbert qui consiste à reconstruire à partir de la représentation de monodromie une équation fuchsienne possédant ρ pour représentation de monodromie. Pour cela on utilise [858] (th.4.3.2 p.85) pour calculer le schéma de Riemann associé. On reconstruit alors une équation fuchsienne (une équation hypergéométrique perturbée) qui est avec $\sigma_3 + \tau_3 = 1$ et $\sigma_3 + \sigma_3^{-1} = 3$:

$$x(1-x)\frac{d^2u}{dx^2} + (1-2x)\frac{du}{dx} - (\sigma_3\tau_3)u = \frac{1}{4\pi^2x(1-x)}\log(\frac{3+\sqrt{5}}{2})\log(\frac{3-\sqrt{5}}{2})u.$$

Elle identifie un opérateur différentiel dont l'analyse spectrale reste à faire et à comparer avec le spectre de Markoff :

$$L = D^2 + \frac{(1-2x)}{x(1-x)}D - \frac{(\sigma_3\tau_3)4\pi^2x(1-x) + \log(\frac{3+\sqrt{5}}{2})\log(\frac{3-\sqrt{5}}{2})}{4\pi^2x^2(1-x)^2}.$$

3.5. La présentation classique de la théorie de Teichmüller. La théorie de Teichmüller a pour but de déterminer toutes les structures conformes sur une même surface topologique. Comme une structure conforme définit une structure différentielle orientée à deux dimensions, on peut décomposer le problème en deux : construire d'abord sur une structure topologique une structure différentielle ou la structure riemannienne unique qu'elle définit, ensuite construire sur cette dernière

une structure conforme. Le second problème a une solution unique. Le premier est beaucoup plus délicat, notamment si la surface topologique n'est pas compacte. Au-dela de ce qui précède une solution peut être obtenue par différents autres moyens comme la quasi-conformité. On donne ici quelques indications sur cette façon classique de présenter la théorie de Teichmüller.

- 3.5.1. Classes d'équivalence conforme. Deux métriques ds^2 et dt^2 sont dites conformément équivalentes si l'application identique $Id: (\mathcal{M}, dt^2) \longrightarrow (\mathcal{M}, ds^2)$ est une transformation conforme de \mathcal{M} . En écrivant la métrique ds^2 sous la forme $ds^2 = \lambda \mid dz + \mu(z)d\overline{z}\mid^2$ on voit que les classes d'équivalence conforme sont paramétrées par $\mu(z)$. Leur ensemble $Conf(\mathcal{M})$ peut être vu comme un ensemble quotient $Conf(\mathcal{M}) = Met(\mathcal{M})/C_+^{\infty}(\mathcal{M})$, où $Met(\mathcal{M})$ est l'ensemble de toutes les métriques possibles sur \mathcal{M} , et $C_+^{\infty}(\mathcal{M})$ le groupe multiplicatif des fonctions λ réelles positives non nulles, différentiables, définies sur \mathcal{M} .
- 3.5.2. Espace des modules (ou des classes d'équivalence difféomorphes). Deux métriques ds^2 et dt^2 sur une surface topologique \mathcal{M} sont dites difféomorphiquement équivalentes si et seulement si on a un difféomorphisme $f:(\mathcal{M},dt^2)\longrightarrow (\mathcal{M},ds^2)$ préservant l'orientation et conforme. Avec $ds^2=\lambda\mid dz+\mu(z)d\overline{z}\mid^2$ on voit que les classes d'équivalence difféomorphes correspondant à une même classe d'équivalence conforme déterminée par $\mu(z)$ sont paramétrées par λ . Soit $Diff_+(\mathcal{M})$ le groupe des difféomorphismes de \mathcal{M} dans \mathcal{M} . Les classes d'équivalence difféomorphes définissent $\mathcal{M}od(\mathcal{M})=Met(\mathcal{M})/Diff_+(\mathcal{M})$ l'espace des modules de la surface topologique \mathcal{M} . On a une surjection canonique de $\mathcal{M}od(\mathcal{M})$ dans $Conf(\mathcal{M})$.
- 3.5.3. Espace de Teichmüller. Entre $C^{\infty}_{+}(\mathcal{M})$ et $Diff_{+}(\mathcal{M})$ existe le groupe $Diff_{0}(\mathcal{M})$ de tous les difféomorphismes isotopes à l'identité. On dit que les deux métriques ds^{2} et dt^{2} sur la surface topologique \mathcal{M} sont fortement équivalentes si et seulement s'il existe $f \in Diff_{0}(\mathcal{M})$ de \mathcal{M} tel que $f:(\mathcal{M},dt^{2}) \longrightarrow (\mathcal{M},ds^{2})$ soit conforme. On dit alors que $Teich(\mathcal{M}) = Met(\mathcal{M})/Diff_{0}(\mathcal{M})$ est l'espace de Teichmüller. On trouve dans [582] (p.150) une précision sur la validité de cette définition qui n'est adéquate que pour certaines surfaces, et qui nécessite pour être valable de considérer que $Met(\mathcal{M})$ ne contient que les métriques pour lesquelles la courbure de Gauss de \mathcal{M} est constante. Posent problème les surfaces ayant pour revêtement conforme universel la sphère de Riemann \mathcal{S}^{2} ou \mathbb{C} . Les autres cas de revêtement \mathcal{H} ne posent pas de difficulté. On a donné dans [632] différents espaces de Teichmüller montrant que piqûres et trous ne jouent pas même rôle sur une surface de Riemann.
- 3.5.4. Groupe de Teichmüller des classes d'applications. Comme $Diff_0(\mathcal{M})$ est un sous-groupe normal de $Diff_+(\mathcal{M})$, on peut aussi définir le groupe (parfois dit modulaire) de Teichmüller, encore appelé groupe des classes d'applications (mapping class group) $\Gamma_{\mathcal{M}} = Diff_+(\mathcal{M})/Diff_0(\mathcal{M})$. Le groupe $\Gamma_{\mathcal{M}}$ est un groupe discret, interprétable comme le groupe des composantes connexes du groupe $Diff_+(\mathcal{M})$. Il est engendré par les twists de Dehn ([582] p.157). Les twists de Dehn engendrent le groupe $\Gamma_{\mathcal{M}}$ mais ils n'en constituent en général pas un ensemble minimal de générateurs. Sont importants ceux qui ne sont pas homotopes à l'identité, par exemple parce qu'ils font le tour d'une poignée de la surface ou d'une piqûre. Le groupe $\Gamma_{\mathcal{M}}$ est isomorphe à un quotient d'un groupe d'automorphismes du groupe de Poincaré ([383] (p. 17), [867] (ch. 2)) ici noté $\pi_1(\mathcal{M}, *)$:

$$\Gamma_{\mathcal{M}} \simeq Aut_*(\pi_1(\mathcal{M},*))/Int(\pi_1(\mathcal{M},*)) = Out_*(\pi_1(\mathcal{M},*)),$$

où $Int(\pi_1(\mathcal{M},*))$ est le groupe des automorphismes intérieurs de $\pi_1(\mathcal{M},*)$, et $Aut_*(\pi_1(\mathcal{M},*))$ est le groupe des automorphismes de $\pi_1(\mathcal{M},*)$ induits par un homéomorphisme de \mathcal{M} . Le groupe $Aut_*(\pi_1(\mathcal{M},*))$ est contenu dans le groupe de tous les automorphismes $Aut(\pi_1(\mathcal{M},*))$. Ainsi s'introduit le groupe plus vaste $\Gamma_{\pi_1(\mathcal{M}_{top},*)} = Out(\pi_1(\mathcal{M},*))$ dont $\Gamma_{\mathcal{M}}$ est un sous-groupe. On a regroupé dans [632] tout un ensemble de résultats connus pour les groupes de Poincaré et les groupes de classes d'applications, mais dispersés dans la littérature sur ce thème [74] [420] [384] [192] [819] [291]. Dans différents cas on est certain de l'égalité $\Gamma_{\mathcal{M}} = \Gamma_{\pi_1(\mathcal{M}_{top},*)}$, par exemple lorsque le théorème de Dehn Nielsen s'applique comme c'est le cas pour les surfaces compactes [866] (p. 194). Ce théorème permet d'expliciter le lien avec la présentation faite ci-dessus de la théorie de Teichmüller par les représentations. Le manuscrit de Fenchel et Nielsen [594] explicite d'ailleurs l'homéomorphisme qu'induit tout automorphisme donné dans $Aut(\pi_1(\mathcal{M},*))$.

3.5.5. Lien entre espace de Teichmüller et espace des modules. On a défini plusieurs quotients avec \mathcal{M} , l'espace des modules $\mathcal{M}od(\mathcal{M}) = Met(\mathcal{M})/Diff_+(\mathcal{M})$, l'espace de Teichmüller $\mathcal{T}eich(\mathcal{M}) = Met(\mathcal{M})/Diff_0(\mathcal{M})$, le groupe des classes d'applications $\Gamma_{\mathcal{M}} = Diff_+(\mathcal{M})/Diff_0(\mathcal{M})$. La comparaison de leur définition fait apparaître l'espace des modules comme un quotient de l'espace de Teichmüller par le groupe discret des classes d'applications agissant sur cet espace de façon propre et discontinue ([706] p. 12)

$$\mathcal{M}od(\mathcal{M}) \simeq \mathcal{T}eich(\mathcal{M})/\Gamma_{\mathcal{M}}.$$

De sorte $Teich(\mathcal{M})$ peut être considéré comme un revêtement ramifié au-dessus de l'espace des modules $\mathcal{M}od(\mathcal{M})$. Cette configuration est comparable à celle des groupes fuchsiens agissant sur le revêtement des surfaces de Riemann. Une piste pour développer son étude émerge de la comparaison entre espaces de Teichmüller et surfaces de Riemann de revêtement conforme \mathcal{H} , car on a :

- L'espace de Teichmüller dispose d'une structure topologique ([706] p.10).
- Il est muni d'une structure analytique réelle [2].
- C'est une composante d'une variété affine réelle définie par des polynômes à coefficients rationnels ([720] p. 175).
 - Il est muni d'une métrique naturelle, dite de Weil-Peterson ([582] p. 157).
 - On peut y construire une structure analytique complexe naturelle [578] [235].
 - C'est une variété kählérienne de courbure négative ([582] p. 157, [5]).
 - Il possède une structure d'espace de Stein ([380] p. 171, [67]).

3.6. Compactification de l'espace de Teichmüller. Etant en général de dimension supérieure à 2, les espaces de Teichmüller peuvent être vus comme des généralisations des surfaces de Riemann. Dans beaucoup de cas, on a des modèles topologiques d'espaces de Teichmüller ([582] (p.153), [380] (p.9), [578] (p.111) [706] (p. 18)). Des exemples d'espaces de Teichmüller décrits par des équations algébriques sont dès à présent disponibles ([420] p. 1206 relations 4-1 et 4-2). Ils permettent d'envisager l'existence d'autres équations diophantiennes dont la résolution ressemble à celle de Markoff, et est intrinsèquement liée à une structure géométrique. Un exemple déjà connu de ce type est donné par [43]. Mais ce que l'on vient de voir offre de très nombreuses autres possibilités. Ce point est confirmé par le fait que toute variété de Stein est biholomorphiquement équivalente à une sousvariété analytique complexe de \mathbb{C}^n pour un certain n entier ([463] p. 180, [415] p. 269). En compactifiant une telle variété, on fait le lien avec la géométrie algébrique

grâce au théorème de Chow ([732] p.29-30). Remarquons que la compactification d'une surface de Riemann comme \mathcal{H} peut ne plus être une surface de Riemann. On a observé entre les tores percés conformes hyperboliques et paraboliques quelques-uns des phénomènes intervenant dans la compactification des espaces de Teichmüller. L'étude de cette compactification est l'une des perspectives qui ont été ouvertes par W. P. Thurston [255]. Elle prend ici une signification particulière dans l'esprit de [732] car elle conduit inversement à l'idée de considérer toute équation diophantienne que l'on cherche à résoudre comme donnée par un tel processus. Les espaces compacts simplement connexes jouent un rôle équivalent dans les dimensions supérieures à celui de la sphère de Riemann \mathcal{S}^2 . Les variétés analytiques complexes compactes et simplement connexes, sont homéomorphes à des sphères ([527] p. 142). Pour mémoire, la conjecture de Poincaré qui transpose ce dernier résultat aux variétés réelles de dimension 3 reste toujours ouverte, sachant qu'elle est résolue en dimensions supérieures [756].

- 3.7. Espaces de Stein et domaines de Riemann. Une étude directe des espaces de Stein \mathfrak{X} s'inspirant de celle des surfaces de Riemann constitue une piste utile pour approfondir la théorie de Teichmüller. Ces espaces sont intéressants pour avoir suffisamment de fonctions holomorphes globales pour séparer ses points. En notant $\mathcal{O}(\mathfrak{X})$ la \mathbb{C} -algèbre unitaire des fonctions holomorphes de \mathfrak{X} dans \mathbb{C} , on fabrique une algèbre topologique qui est une sous-algèbre de Fréchet de la C-algèbre $\mathcal{C}(\mathfrak{X})$ des fonctions continues de \mathfrak{X} dans \mathbb{C} . Tout caractère continu de l'algèbre $\chi: \mathcal{O}(\mathfrak{X}) \to \mathbb{C}$ est défini par un point de $x \in \mathfrak{X}$ lorsque ce dernier espace est de dimension finie : $\mathfrak{X} \subset \mathbb{C}^n$. Et l'application $\chi \in X(\mathcal{O}(\mathfrak{X})) \to x \in \mathfrak{X}$ est un homéomorphisme ([415] p. 268). Cette propriété est caractéristique des espaces de Stein ([320] p. 72). Les surfaces de Riemann ouvertes sont des espaces de Stein ([415] p. 224), tout comme les espaces complexes qui ne contiennent qu'un nombre fini de points. Mais les surfaces de Riemann compactes ne sont pas des espaces de Stein ([320] p. 87). Ceci montre clairement que les espaces de Stein ne sont qu'une généralisation partielle des surfaces de Riemann même s'ils contiennent les espaces de Teichmüller. Une bonne définition pour englober les surfaces de Riemann et les espaces de Teichmüller dans un formalisme commun semble plutôt être celle de domaine de Riemann ([415] (p. 38 et p. 96) [393] [311]). Elle correspond aux domaines d'holomorphie simplement connexes caractérisés par le fait qu'il existe $f \in \mathcal{O}(\mathfrak{X})$ non holomorphiquement extensible à un point se situant hors de $\mathfrak{X} \subset \mathbb{C}^n$. Plusieurs autres pistes sont apparues pour approfondir les réflexions précédentes sur la théorie de Markoff:
- L'étude des groupes fuchsiens de dimension supérieure, dans l'esprit de [15] [16] ou [670].
- La théorie de Galois des extensions finies de corps de fractions $\mathbb{C}(X_1,...X_n)$. Il serait utile de comprendre si elle a un lien avec les polylogarithmes ([825] [478] [125]) et comment l'on peut construire une théorie de Galois pour les équations aux dérivées partielles, ayant éventuellement un lien avec la théorie des fonctions hypergéométriques généralisées [606].
- La théorie de la combinatoire des voies ferrées ou "train tracks" telle qu'elle est présentée dans [564] [612] [563].

4. Codage des géodésiques

Une conséquence de la théorie de Teichmüller concerne le fait que le groupe des classes d'applications possède une structure que l'on peut décrire tout comme celle du groupe de Poincaré. Il en découle des conséquences pour le codage des géodésique d'une surface de Riemann que l'on va maintenant évoquer, ainsi que les liens avec les fractions continues.

4.1. Décomposition du groupe des classes d'applications. Le groupe des classes d'applications $\Gamma_{\mathcal{M}}$ se décompose en utilisant les deux opérations sur les groupes de somme amalgamée et d'extension HNN ([728] [45] [139] [454] (III 14) [333]) :

Proposition 4.1. Pour toute surface de Riemann \mathcal{M} de type conforme

$$(g, n, m) \notin \{(0, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 2, 0), (1, 0, 0)\},\$$

c'est-à-dire ayant $\mathcal H$ pour revêtement conforme, le groupe des classes d'applications est simplement décomposable.

A tout groupe simplement décomposable, on associe un graphe de décomposition qui décrit tous les composants nécessaires et synthétise toutes les indications dont on a besoin pour combiner ces composants. Le groupe des classes d'applications se décompose parce que la surface de Riemann \mathcal{M} se décompose par plombage en pantalons ([330] (p. 312), [49] (article de C. Series), [670] (p. 408), [720] (p. 117)). La démonstration s'effectue en remontant au groupe fuchsien qui définit la surface \mathcal{M} . Il possède aussi la propriété d'être simplement décomposable ([330] p. 312). On est donc ramené à un problème d'algèbre avec un groupe G simplement décomposable dont on étudie le quotient Out(G) = Aut(G)/Int(G). On utilise pour conclure les méthodes de [611]. Cette approche vaut pour le groupe de Poincaré comme pour le groupe des classes d'applications et est développée dans [814]. En considérant des géodésiques de \mathcal{M} dont les longueurs correspondent aux modules [380] et en associant une valeur dans un groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ qui correspond au sens de parcours de la géodésique, ainsi qu'une lettre qui correspond à un élément du groupe $\pi_1(\mathcal{M},*)$ correspondant à cette géodésique, le graphe de décomposition permet de reconstruitre le groupe de Poincaré $\pi_1(\mathcal{M}, *)$ puis $Out(\pi_1(\mathcal{M}, *))$ et enfin $\Gamma_{\pi_1(\mathcal{M}_{ton}, *)}$.

4.2. Codage des géodésiques. Il exite un ensemble de travaux s'appuyant sur les fractions continues pour coder les géodésiques fermées des tores percés [723] dont l'extension à des surfaces de Riemann \mathcal{M} plus compliquées que les tores percés n'est pas au point [704] malgré le grand intérêt de cette question. L'auteur s'est donc penché sur ce sujet en cherchant à comprendre comment il faudrait procéder pour obtenir une bonne généralisation et des résultats nouveaux. Le point essentiel qui en résulte est que le groupe de Poincaré $\pi_1(\mathcal{M}, *)$ et le premier groupe $H_1(\mathcal{M}, \mathbb{Z})$ de l'homologie singulière de \mathcal{M} contiennent dans beaucoup de cas l'information essentielle, ne serait-ce que parce que toute classe de ces groupes contient alors une géodésique.

En se limitant dans un premier temps à un groupe fuchsien de signature $(g; r: v_1, v_2, ..., v_r; 0)$, on peut orienter de façon cohérente les arêtes du polygone défini [408] [416] pour décrire un domaine fondamental de ce groupe fuchsien. Ceci privilégie des sens de parcours sur les lacets géodésiques de la surface de Riemann \mathcal{M} que l'on considère. A partir de là, toute autre géodésique orientée de la surface

 $\mathcal{H}/\Gamma = \mathcal{M}$ peut être codée selon la méthode de Morse et Koebe [723]. Chaque fois que progressant dans le sens de la géodésique on traverse une géodésique constituant un côté de la dissection canonique, on inscrit la lettre correspondante avec une puissance +1 ou -1 qui est le nombre d'intersections correspondant. Cette convention de signe utilise l'orientation de la surface \mathcal{M} , comme décrit dans [823] (p. 105). Ceci permet d'associer à toute géodésique un mot écrit comme une suite doublement infinie de lettres à la puissance ± 1 prises dans l'ensemble

$$\{\overline{A}_1, \overline{B}_1, ..., \overline{A}_g, \overline{B}_g, \overline{E}_1, ..., \overline{E}_r\}.$$

Toutes les suites ne sont pas possibles. Le fait qu'il en existe d'infinies montre que les suites associées aux géodésiques ne font pas partie du groupe Γ dont les termes s'expriment seulement comme des mots finis écrits avec les mêmes lettres. Le groupe Γ est donc trop petit pour décrire toutes les géodésiques de la surface et on doit imaginer de faire appel pour atteindre cet objectif à d'autres opérations catégoriques que le simple produit libre de groupes. Néanmoins les géodésiques fermées correspondent à des mots infinis périodiques dont on peut coder la période avec les lettres précédentes, désignant des éléments de $\Gamma \simeq \pi_1(\mathcal{M},*)$. D'après ce que l'on connaît sur les tores percés, toute période finie de ce type ne permet pas de coder une telle géodésique fermée. On sait par contre reconnaître les géodésiques fermées simples, c'est-à-dire ne se coupant pas elles-mêmes dans l'essentiel des cas [723] [725]. Ce résultat s'étend par les considérations précédentes au cas plus général d'une surface de Riemann \mathcal{M} de signature s.

Cette approche a un lien avec les groupes d'homotopie et d'homologie, au moins dans le cas compact où le théorème de Hilbert indique que toute classe d'homotopie libre de lacets fermés de \mathcal{M} contient une géodésique fermée, et que deux points quelconques de \mathcal{M} peuvent être reliés par une géodésique appartenant à toute classe d'homotopie donnée ([531] p. 390). Il reste cependant là des questions à approfondir. On voit par exemple par ce qui précède qu'une géodésique peut être décrite par une suite doublement infinie de telles lettres (l'analogie est évidente avec les fractions continues!), et qu'un difféomorphisme de \mathcal{M} transforme cette géodésique en une autre codable de même avec ces lettres. Ce difféomorphisme agit comme un générateur pseudo-aléatoire (voir [183] [690] [698]). Il est connu qu'il puisse ne pas être une isométrie ([62] p. 429), ni donc a fortiori un automorphisme conforme de \mathcal{M} . Il existe d'autres méthodes de codage des géodésiques, dont certaines plus directement tournées vers les fractions continues [410] [32]. On peut faire intervenir ces dernières en décomposant toutes les matrices $A_1, B_1, ..., A_g, B_g, E_1, ...E_r$ intervenant en produit de matrices de forme

$$\left[\begin{array}{cc} a & 1 \\ 1 & 0 \end{array}\right]^{\pm 1}, \ a \in \mathbb{N} \backslash \{0\}.$$

On trouve dans [467] (p. 334) et [331] une évocation sommaire des problèmes d'approximation diophantienne liés à ce type de situation. Pour les approfondir il faut préalablement étendre ce qui précède à d'autres signatures que celles privilégiées ci-dessus, ce qui ne paraît pas insurmontable. L'auteur a quelques travaux en cours sur ce thème notamment pour comprendre le lien avec les points de Weierstrass [474].

- 4.3. Dynamique symbolique. La dynamique symbolique et sa variante du chaos déterministe consiste à étudier cette situation en poursuivant les travaux fondateurs de Hadamard ([187] p. 396, [49], [687], [484], [3], [4], [701]). Les systèmes dynamiques vérifiant l'axiome A d'Anosov s'introduisent dans ce contexte, avec le fait remarquable que les surfaces de Riemann hyperboliques ont toutes un flot géodésique ayant cette propriété ([14] pour le cas compact, et [687] (p. 171) pour une extension au cas non compact). Ceci permet de classer les homéomorphismes entre surfaces de Riemann avec un important résultat dû à W. Thurston (cité dans [622] ou [563]).
- 4.4. Approche ergodique. Ce thème d'étude fait le lien avec des sujets aussi importants que la thermodynamique, la théorie ergodique et l'information [688] [71] [10], certaines fonctions zêta [609] [780], le décompte des nombres premiers et son analogie avec le comportement de certaines géodésiques [608] [42] [88] [829] [445] [374], l'algèbre des corps quadratiques et l'évaluation de leur nombre de classes [699] [812], l'interprétation thermodynamique de la mesure de Mahler de certains polynômes [701] (paragraphe 5.18), la mécanique hamiltonienne car le flot géodésique constitue un système hamiltonien sur la variété symplectique \mathcal{D}_2 des droites [34], le théorème KAM des tores invariants et les petits diviseurs [27] [222] [854] [340], la dynamique holomorphe et les objets universels à caractère fractal qu'elle construit [770] [855], l'analyse spectrale de certains opérateurs [562] [689] [158], les cycles limites et le phénomène de Stokes ($16^{\hat{e}me}$ problème de Hilbert), etc...

5. Ubiquité de la fonction êta de Dedekind

Un certain nombre de résultats classiques en théorie du codage de l'information comme la formule de MacWilliams [507] ont un lien avec les surfaces de Riemann. On a approfondi ce thème sachant que les recherches de l'auteur sur la théorie de Markoff ont débuté avec une préoccupation liée au codage. Ceci a permis d'identifier un lien assez remarquable avec la fonction êta de Dedekind dont on a vu qu'elle donne naissance aux équations diophantiennes qui généralisent celle de la théorie de Markoff. On a aussi pu préciser comment l'essentiel des fonctions transcendantes habituelles s'écrivent avec la fonction êta de Dedekind qui joue donc un rôle fondamental.

5.1. Les fonctions thêta. Les fonctions thêta définies par un réseau $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire naturel sont avec $\tau \in \mathcal{H}$ et $q = \exp(2i\pi\tau)$

$$\theta_{\Gamma}(\tau) = \sum_{m \in \Gamma} \exp(i\pi\tau < m, m >) = \sum_{m \in \Gamma} q^{\frac{1}{2} < m, m >} = \sum_{r=0}^{\infty} a_r q^r.$$

Ce sont les fonctions génératrices des nombres $a_r = Card\{m \in \Gamma \mid < m, m >= 2r\}$. Elles comptent les points du réseau Γ situés dans une sphère de rayon $\sqrt{2r}$ centrée à l'origine. En d'autres termes, les coefficients du développement en série de Fourier de ces fonctions donnent le nombre de représentations d'un entier par une forme quadratique définie positive. Les formules les plus générales ont été données dans ce domaine par A. Malyshev ([387] chapitre 11). Les fonctions thêta définies par un réseau unimodulaire pair $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ identique à son dual donnent des exemples classiques ([729] p.174) de fonctions automorphes de poids (n/2) pair du groupe $PSL(2,\mathbb{Z})$. Ceci est une conséquence de la formule de Poisson appliquée à la fonction

réelle $\Theta(t) = \theta_{\Gamma}(it)$, c'est-à-dire de la formule de Jacobi ([**557**] p. 149). Cette formule de Poisson a un lien très profond avec la loi de réciprocité quadratique [**60**].

5.2. Lien avec le codage de l'information. La formule de Poisson peut elle même être considérée comme une formule de trace ([778] ch 1.3). Elle donne la formule de MacWilliams sur les polynômes de poids des codes correcteurs d'erreurs [507]. L'introduction des fonctions thêta permet d'interpréter ce dernier résultat [95] [96] [548] [59]. Ceci permet aussi de traduire les relations entre certains codes importants pour les applications et certains réseaux. Par exemple le code de Golay étendu correspond au réseau de Leech qui est l'unique réseau unimodulaire pair de \mathbb{R}^{24} sans racine d'après un résultat de J. H. Conway ([236] p.105). Ceci donne le groupe simple M_{24} , le groupe de Mathieu, dont la simplicité peut être comprise par l'approche galoisienne de la surface de Riemann correspondante. Egalement le polynôme de poids $W_C(X,Y)$ de tout code $C \subset \mathbb{F}_2^n$ autodual doublement pair s'écrit par un théorème de Gleason ([236] 69) comme polynome en φ et ξ où

$$W_{\widetilde{H}}(X,Y) = X^8 + 14X^4Y^4 + Y^8 = \varphi,$$

polynôme de poids du code de Hamming étendu $\widetilde{H} \subset \mathbb{F}_2^7$, et

$$W_{\widetilde{G}}(X,Y) = (X^8 + 14X^4Y^4 + Y^8)^3 - 42X^4Y^4(X^4 - Y^4)^4 = W_{\widetilde{H}}(X,Y)^3 - 42\xi,$$

polynôme de poids du code de Golay étendu $\widetilde{G} \subset \mathbb{F}_2^{24}$. Pour approfondir l'étude du rapport entre les deux codes cités, et leur lien avec des géométries finies comme les systèmes de Steiner, on renvoie à [33] (§7.11 p. 284). Un intérêt de la dernière expression pour notre sujet est qu'en notant $q = \exp(2i\pi\tau)$ et

$$A = A(\tau) = \sum_{n \in \sqrt{2}\mathbb{Z}} q^{\frac{1}{2}n \cdot n} = \sum_{n \in 2\mathbb{Z}} q^{\frac{1}{4}n \cdot n}, \ B = B(\tau) = \sum_{n \in 2\mathbb{Z}+1} q^{\frac{1}{4}n \cdot n},$$

on retrouve la fonction êta de Dedekind ([236] p.67) :

$$A^4B^4(A^4 - B^4)^4 = 16q \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{24} = 16\eta(\tau)^{24}.$$

Ceci a conduit l'auteur à approfondir l'étude des réseaux ([525] [167]) ainsi que les pavages hyperboliques ([236] (chapitre 4) [808] [809] [512]) pour obtenir des informations sur certains codes ([303]). Il est reconnu depuis un certain temps qu'une dualité existe entre le codage de l'information et la quantification, notamment en utilisant des fonctions thêta. Les développements qui précèdent éclairent cette observation faite dans [266] et que l'on peut interpréter par recours au groupe d'homologie $H_2(\mathcal{M}, \mathbb{Z})$ et aux formes d'intersection déjà évoquées.

Les fonctions thêta les plus générales à plusieurs variables ont déjà été introduites en liaison avec la variété jacobienne (voir [571] chapitre 2) et s'écrivent avec $u \in \mathbb{C}^g$ et $\mathbf{M} \in \mathcal{H}_g$

$$\theta(u, \mathbf{M}) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^g} \exp(\pi i (t^t m) \mathbf{M} m + 2\pi i (t^t m) u).$$

Elles redonnent $\theta_{\Gamma}(\tau) = \theta(0, \tau \mathbf{M})$ avec u = 0 et $< m, m >= ({}^t m) \mathbf{M} m$. Elles sont importantes pour décrire différentes situations physiques telles que la propagation de la chaleur ([778] 1.2 exemple 1, 1.3 exercice 7), la propagation de solitons ou le comportement de la jonction Josephson (voir l'article de J. A. Zagrodzinski dans

[634]). Avec g=1 et $\mathbf{M}=\tau \mathbf{1}_g$ les expressions précédentes donnent la forme plus simple étudiée dans le chapitre 1 de [571] avec $u \in \mathbb{C}$ et $\tau \in \mathcal{H}$

$$\theta(u,\tau) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \exp(\pi i m^2 \tau + 2\pi i m u).$$

Pour u=0, on obtient $A(\tau)=\theta(0,2\tau)$ donnant un lien avec la fonction η de Dedekind ([387] p. 177) qui permet aussi d'exprimer $B(\tau)$ avec l'expression donnée ci-dessus pour $16\eta(\tau)^{24}$:

$$A(\frac{2r-1}{4}) = \theta(0, \tau - \frac{1}{2}) = \frac{\eta^2(z)}{\eta(2z)}.$$

5.3. Lien avec l'équation de la chaleur. La fonction thêta $\theta(u,\tau)$ vérifie une équation de la chaleur pour $u, \tau = it \in \mathbb{R}$ et t positif :

$$\frac{\partial}{\partial t}\theta(u,it) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2}{\partial u^2} \theta(u,it).$$

On trouve ainsi une solution fondamentale de l'équation de la chaleur pour $u \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Cette observation remonte à Fourier lui-même ([268] §241, [390], [839] p. 28) qui a aussi utilisé l'équation de la chaleur pour mettre au point ses séries. Eisenstein a ensuite utilisé les travaux de Fourier pour démontrer des énoncés de théorie des nombres relatifs à la fonction ζ de Riemann conjecturés antérieurement dans [250]. Remarquons que parmi les produits infinis utilisés par Eisentein apparaît explicitement une autre solution de l'équation de diffusion de la chaleur, la fonction de Gauss s'écrivant

$$T(u,t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \exp(-\frac{\pi u^2}{t}).$$

Cette observation permet comprendre le lien existant entre la théorie du mouvement brownien et les fonctions thêta et zêta [857].

5.4. Les quatre fonctions thêta habituelles. Certaines expressions des fonctions thêta redonnent, dans l'esprit des anciens travaux de C. G. Jacobi, d'autres fonctions automorphes comme par exemple les fonctions elliptiques. On utilise pour cela les fonctions thêta suivantes qui vérifient aussi l'équation de la chaleur, notées selon les auteurs

$$\theta_{jk}(u,\tau) = \theta \left[\begin{array}{c} j \\ k \end{array} \right] (u,\tau) = \vartheta_{[2j,-2k]}(\frac{u}{\pi},\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp(\pi i (n+j)^2 \tau + 2\pi i (n+j)(u+k)).$$

Les fonctions thêta permettent de plonger ([821] p.193) une courbe elliptique dans un espace projectif $\mathbf{P}^{l-1}(\mathbb{C})$ où $l \geq 3$. Elles permettent aussi d'écrire une telle courbe comme intersection de deux quadriques grâce à des relations classiques dues à Riemann et Jacobi que l'on retrouve par exemple dans ([452] ch. 7). Les fonctions thêta sont souvent présentées comme des généralisations elliptiques de la fonction exponentielle (par exemple [840]). Vouloir les utiliser comme l'exponentielle qui permet de passer d'un groupe de Lie à une algèbre de Lie [559] a ouvert pour l'auteur toute une perspective de recherches. Usuellement, on restreint à 4 le nombre de fonctions thêta utilisées grâce aux propriétés suivantes :

$$\vartheta_{[2j,-2k]}(z+\frac{1}{2},\tau) = \vartheta_{[2j,-2k-2]}(z,\tau),$$

$$\vartheta_{[2j,-2k]}(z+\frac{1}{2}\tau\pi,\tau) = \exp(-i\pi\tau/4\theta - iz - ki\pi)\vartheta_{[2j+2,-2k]}(z,\tau).$$

Ceci permet de se limiter avec $\mathbf{q} = \exp(i\pi\tau)$ aux quatre fonctions suivantes qui possèdent une décomposition en produits infinis ([129] (ch.V) [557] (ch.3) [632]):

$$\vartheta(u,\tau) = 2\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \mathbf{q}^{(n+\frac{1}{2})^2} \sin(2n+1)\pi u = \theta(u,\tau),$$

$$\vartheta_1(u,\tau) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{q}^{(n+\frac{1}{2})^2} \cos(2n+1)\pi u = \theta(\frac{1}{2}-u,\tau),$$

$$\vartheta_2(u,\tau) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \mathbf{q}^{n^2} \cos(2n\pi u) = -i\mathbf{q}^{\frac{1}{4}} \exp(-i\pi u)\theta(\frac{\tau}{2}-u,\tau),$$

$$\vartheta_3(u,\tau) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{q}^{n^2} \cos(2n\pi u) = \mathbf{q}^{\frac{1}{4}} \exp(-i\pi u)\theta(\frac{\tau+1}{2}-u,\tau).$$

5.5. Expressions avec la fonction êta de Dedekind. Si $\vartheta'(u,\tau)$ désigne la dérivée de ϑ par rapport à u, on a une propriété d'automorphie avec une racine huitième de l'unité κ dépendant de la matrice utilisée dans $SL(2,\mathbb{Z})$

$$\vartheta'(0, \frac{a\tau + b}{c\tau + d}) = \kappa(c\tau + d)^{\frac{3}{2}}\vartheta'(0, \tau).$$

Ceci met en évidence un lien avec la fonction η de Dedekind telle que :

$$\eta(\tau)^{24} = \mathbf{q}^2 \prod_{n \ge 1} (1 - \mathbf{q}^{2n})^{24}, \text{ où } \mathbf{q} = \exp(i\pi\tau).$$

On trouve par exemple les formules suivantes ([129] p. 80 et p. 123, [436] p. 46, [17] p. 91, [310], [828] p. 161) :

$$\begin{split} \vartheta'(0,\tau) &= 2\pi \eta^3(\tau) = -2\pi \eta(\tau/2) \eta((\tau+1)/2) \eta(2\tau) = \pi \vartheta_1(0,\tau) \vartheta_2(0,\tau) \vartheta_3(0,\tau), \\ \vartheta(0,\tau) &= i \exp(-i\pi\tau/9) \eta(\tau/3), \\ \vartheta_1(0,\tau) &= 2\frac{\eta^2(2\tau)}{\eta(\tau)}, \ \vartheta_2(0,\tau) = \frac{\eta^2(\tau/2)}{\eta(\tau)}, \ \vartheta_3(0,\tau) = \frac{\eta^2((\tau+1)/2)}{\eta(\tau)}, \\ \prod_{0 \leq u,v < m, \ (u,v) \neq (0,0)} \theta \left[\begin{array}{c} 1/2 + u/m \\ 1/2 + v/m \end{array} \right] (0,\tau) = (-1)^{m-1} m \eta(\tau)^{m^2-1}. \end{split}$$

Le lien avec l'invariant modulaire J et la fonction λ_{Λ} s'en déduit ([129] p. 85) :

$$J(\tau) = \frac{(\vartheta_1(0,\tau)^8 + \vartheta_2(0,\tau)^8 + \vartheta_3(0,\tau)^8)^3}{54(\vartheta_1(0,\tau)\vartheta_2(0,\tau)\vartheta_3(0,\tau))^8} = \frac{4}{27} \frac{(1 - \lambda_\Lambda + \lambda_\Lambda^2)^3}{\lambda_\Lambda^2(1 - \lambda_\Lambda)^2},$$
$$\lambda_\Lambda(\tau) = \frac{\vartheta_1(0,\tau)^4}{\vartheta_3(0,\tau)^4} = 16(\eta^2(2\tau)\eta(\tau/2)\eta^{-3}(\tau))^8.$$

Egalement on peut écrire avec η les fonctions elliptiques de Jacobi ([129] p. 100 et p. 103 [557] ch.3 [828] (p. 165)). Avec une constante c on a par ([375] p. 191)

$$\wp(u, \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau) = c - \frac{d^2}{du^2} \log \vartheta(\frac{u}{\pi \vartheta_3(0, \tau)^2}, \tau).$$

Le fait que toutes ces fonctions puissent se déduire de η montre l'importance fondamentale de cette fonction aussi utilisée pour des calculs d'approximation [281]. Pour les fonctions L la situation est plus compliquée mais liée [246].

6. Approche hypergéométrique de la théorie de Markoff

On a approfondi quelques remarques faites par Harvey Cohn dans son étude de la théorie de Markoff.

6.1. Relation avec une fonction elliptique. Dans son article initial [143], Harvey Cohn donne la relation suivante pour interpéter géométriquement la théorie de Markoff avec un réseau Λ particulier :

$$1 - J(\tau) = \wp'^{2}(z) = 4\wp^{3}(z) + 1.$$

Le module J est une fonction automorphe pour le groupe fuchsien $\Gamma = PSL(2,\mathbb{Z})$ de facteur $\mu = 1$ et de poids 0. Harvey Cohn dit que les triplets de matrices (A,B,C) associés à la théorie de Markoff classique déterminent un pavage hexagonal du demiplan de Poincaré en τ et correspondent par cette relation entre τ et z à un pavage quadrilatéral par un réseau Λ du plan complexe en z. Il l'illustre géométriquement sur une figure où apparaissent les matrices notées

$$A_0 = \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{array} \right], \ B_0 = \left[\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{array} \right],$$

L'aspect algébrique de ces remarques de Harvey Cohn se résume ([632] fig. 7.7) en décrivant les domaines fondamentaux respectifs de deux pavages de \mathcal{H} , donnant au quotient le tore percé. Le premier est un pavage hexagonal $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta\eta\theta\iota$. Le second donne un domaine quadrilatéral $\kappa\lambda\mu\nu\xi$. Le passage entre les deux est faisable par un jeu de tangram hyperbolique utilisant pour pièces des morceaux composant le domaine fondamental bien connu pour le groupe $PSL(2,\mathbb{Z})$. Pour aller vers le domaine hexagonal, il suffit d'appliquer au domaine modulaire six matrices de forme

$$\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} (k = -2, -1, 0, 1, 2, 3).$$

Pour aller vers le domaine quadrilatéral, il suffit d'utiliser les deux demi-domaines modulaires et les six matrices suivantes ([19] Tome 2 p.368)

$$\left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right], \left[\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{array}\right], \left[\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{array}\right], \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{array}\right], \left[\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{array}\right], \left[\begin{array}{cc} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{array}\right].$$

6.2. Sphère à trois piqûres et invariant modulaire. En réalité, il existe une autre façon de fabriquer une surface de Riemann avec le domaine quadrilatéral $\kappa\lambda\mu\nu\xi$ et cette méthode a été généralisée dans [700]. Il suffit d'identifier $\kappa\lambda$ et $\xi\nu$ par une transformation de $a\in PSL(2,\mathbb{Z})$, ainsi que $\mu\lambda$ et $\mu\nu$ par $b\in PSL(2,\mathbb{Z})$. on fabrique ainsi une sphère à trois piqûres correspondant aux points $0, 1, \infty$. Le calcul explicite peut être fait et détermine pour a et b les matrices

$$a = \left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{array} \right], \ b = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{array} \right].$$

Ces matrices engendrent le groupe $\Gamma(2)$ qui est libre ([386] p.154) et déterminent une structure géométrique unique sur $\mathcal{H}/\Gamma(2)$. Ce qui précède garantit par le théorème de Riemann ([264] p. 163) l'existence d'une relation algébrique entre J et une fonction automorphe pour le groupe $\Gamma(2)$. Cette relation est usuellement calculée à partir des expressions données pour le cas elliptique

$$y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3 = P(x) = 4(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3).$$

On pose, à une permutation près sur e_1 , e_2 , e_3

$$\nu_{31} = (e_3 - e_1) \neq 0, \ \mathbf{x} = \frac{(x - e_1)}{(e_3 - e_1)}, \ \lambda_{\Lambda} = \frac{(e_2 - e_1)}{(e_3 - e_1)}, \ \nu^2 = \frac{1}{4\nu_{31}^3}, \ \mathbf{y}^2 = \nu^2 y^2.$$

Ceci transforme l'équation $y^2 = P(x)$ en la forme de Legendre suivante

$$\mathbf{y}^2 = \mathbf{x}(\mathbf{x} - 1)(\mathbf{x} - \lambda_{\Lambda}) \text{ où } \lambda_{\Lambda} \notin \{0, 1\}.$$

Les permutations possibles sur e_1 , e_2 , e_3 , montrent que deux courbes elliptiques $E_{\lambda_{\Lambda}}$ et $E_{\lambda_{\Lambda}'}$ obtenues ainsi sont isomorphes si et seulement si on a

$$\lambda'_{\Lambda} \in \{\lambda_{\Lambda}, \frac{1}{\lambda_{\Lambda}}, 1 - \lambda_{\Lambda}, \frac{1}{1 - \lambda_{\Lambda}}, \frac{\lambda_{\Lambda}}{\lambda_{\Lambda} - 1}, \frac{\lambda_{\Lambda} - 1}{\lambda_{\Lambda}}\}.$$

Ceci permet de se limiter aux valeurs complexes

$$\lambda_{\Lambda} \in S_4 = \{ \lambda \mid \lambda \in \mathbb{C}, \mid \lambda \mid <1, \mid 1-\lambda \mid <1, \Re(\lambda) \geq (1/2) \}.$$

En inversant les relations précédentes pour déduire e_3 et e_2 on obtient les expressions suivantes montrant que λ_{Λ} ne suffit pas à définir le polynôme P(x) mais que le paramètre accessoire ν_{31} est indispensable :

$$\nu_{31} + \nu_{31}\lambda_{\Lambda} = -3e_1, \ 4\nu_{31}^2\lambda_{\Lambda}e_1 = (12e_1^2 - g_2)e_1 = 8e_1^3 + g_3,$$

$$g_2 = \frac{4\nu_{31}^2}{3}(1 - \lambda_{\Lambda} + \lambda_{\Lambda}^2), \ g_3 = \frac{4\nu_{31}^3}{27}(\lambda_{\Lambda} + 1)(\lambda_{\Lambda} - 2)(2\lambda_{\Lambda} - 1),$$

$$g_2^3 - 27g_3^2 = 16\nu_{31}^6\lambda_{\Lambda}^2(1 - \lambda_{\Lambda})^2.$$

Ceci donne l'expression de J recherchée et très classique

$$J = \frac{g_2^3}{g_2^3 - g_3^2} = \frac{4}{27} \frac{(1 - \lambda_{\Lambda} + \lambda_{\Lambda}^2)^3}{\lambda_{\Lambda}^2 (1 - \lambda_{\Lambda})^2}.$$

Ainsi λ_{Λ} apparaît comme J en tant que fonction d'une variable $\tau \in \mathcal{H}$. En considérant que $\tau = \omega_2/\omega_1$ où ω_1 , ω_2 engendrent le réseau Λ , on peut observer l'action sur $\lambda_{\Lambda}(\tau)$ d'une transformation de $PSL(2,\mathbb{Z})$. Il est facile de voir que si la transformation est dans $\Gamma(2)$, le groupe de la sphère à trois trous, la valeur de cette fonction ne change pas ([264] p.159). La fonction $\lambda_{\Lambda}(\tau)$ est donc automorphe pour ce groupe dont un domaine fondamental apparaît aussi sur la figure précédente. Comme ce domaine fondamental $\kappa\lambda\mu\nu\xi$ est constitué de copies du domaine fondamental de $PSL(2,\mathbb{Z})$, on retrouve d'une autre façon par la méthode de Riemann ([264] p. 163) l'existence de la relation liant J et λ_{Λ} . Celle-ci vient d'être calculée. On voit facilement ([632] fig.7.8 inspirée de [149]) ce que donne la fonction $\tau \to \lambda_{\Lambda}(\tau)$. Elle vérifie

$$\lambda_{\Lambda}(\tau+1) = \frac{\lambda_{\Lambda}(\tau)}{\lambda_{\Lambda}(\tau)-1}, \ \lambda_{\Lambda}(-\frac{1}{\tau}) = 1 - \lambda_{\Lambda}(\tau).$$

Ces conditions mettent en évidence deux matrices dont on vérifie aisément qu'elles engendrent le groupe des permutations à trois éléments :

$$\lambda_{\Lambda} \circ S = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \circ \lambda_{\Lambda}, \ \lambda_{\Lambda} \circ T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \circ \lambda_{\Lambda}.$$

Ainsi s'introduit un groupe fini de matrices isomorphe au groupe des permutations de 3 éléments avec

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{ST} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ce groupe de permutations agit sur les valeurs de λ_{Λ} avec des orbites à 6 éléments sauf les trois cas suivants :

 $\lambda_{\Lambda} \in \{1/2, -1, 2\}$ soit τ dans la classe de i donnant J = 1 et la ramification d'ordre 2 de J (en pratique, deux droites se coupent sur la figure précédente, ce qui correspond à une symétrie carrée).

 $\lambda_{\Lambda} \in \{-\rho, -\rho^2\}$ soit τ dans la classe de $\rho = (-1 + i\sqrt{3})/2$ donnant J = 0, la ramification d'ordre 3 de J (en pratique, trois droites se coupent sur la figure précédente, ce qui correspond à une symétrie hexagonale).

 $\lambda_{\Lambda} \in \{0, 1, \infty\}$ soit τ dans la classe de ∞ donnant $J = \infty$ hors de \mathcal{H} et de \mathbb{C} .

6.3. L'étude hypergéométrique des relations de H. Cohn. Pour comprendre l'origine de la relation utilisée par Harvey Cohn dans [143] pour interpréter la théorie de Markoff, considérons l'expression

$$f = \frac{1}{27}(\lambda_{\Lambda}+1)(\frac{1}{\lambda_{\Lambda}}+1)(1-\lambda_{\Lambda}+1)(\frac{1}{1-\lambda_{\Lambda}}+1)(\frac{\lambda_{\Lambda}}{\lambda_{\Lambda}-1}+1)(\frac{\lambda_{\Lambda}-1}{\lambda_{\Lambda}}+1).$$

C'est par construction un invariant pour le groupe des permutations de 3 éléments appliqué dans le plan en λ_{Λ} [219] exprimable en fonction de g_2 et g_3 . En faisant ce calcul, on trouve facilement ([264] p. 160) la première partie de l'expression donnée par Harvey Cohn

$$1 - f = \frac{4}{27} \frac{(1 - \lambda_{\Lambda} + \lambda_{\Lambda}^2)^3}{\lambda_{\Lambda}^2 (1 - \lambda_{\Lambda})^2} = J.$$

On trouve dans [373] (p. 136) une façon de traiter une telle équation. Ce n'est pas la méthode utilisée ici. On veut plutôt écrire f avec une fonction elliptique en τ particulière. Pour cela on identifie les bords du domaine considéré dans le plan en τ avec le groupe $[SL(2,\mathbb{Z}),SL(2,\mathbb{Z})]$. Ceci donne au quotient un tore percé conforme. Comme le calcul précédent en λ_{Λ} était lié à quelques singularités près à la sphère du domaine modulaire et faisait apparaître J, de même le tore moins un point est lié à un tore complet dont il s'agit d'utiliser la fonction de Weierstrass associée. Ceci revient à travailler à la conjonction de deux uniformisations [533], une dans $\mathbb C$ puis une dans $\mathcal H$.

Dans ses différents articles ([147], [151], [152], [147]), Harvey Cohn mentionne en liaison avec la question étudiée une autre formule issue de travaux de R. Fricke à prendre en compte et qui sous-entend une symétrie hexagonale

$$dz = const. \times \frac{dJ}{J^{2/3}(J-1)^{1/2}}.$$

Il évoque la difficulté du passage entre les différentes expressions, renvoyant à [137] [421] où le problème est étudié sous l'aspect d'un paramètre accessoire vérifiant une équation différentielle de Lamé ([860] p. 110), mais sans conclusions bien nettes. Cette question est liée au $22^{i\hat{e}me}$ problème de Hilbert qui est celui de l'uniformisation numérique d'une surface de Riemann, encore non encore totalement résolu aujourd'hui [721], même si les équations de Lamé font l'objet d'un regain d'intérêt aujourd'hui [21] [818]. La dernière expression reliant z et J peut être construite par simple différentiation. Supposons que l'on ait

$$1 - J(\tau) = \wp^{'2}(z) = 4\wp^{3}(z) + 1,$$

ceci donne

$$-dJ = 12\wp^{2}(z)\wp^{'}(z)dz, \ \wp^{'}(z) = (1-J)^{1/2}, \ \wp^{2}(z) = (J/4)^{2/3}.$$

D'où en remplaçant dans l'expression de -dJ, et à un facteur multiplicatif près, l'expression donnée pour dz. En sens inverse l'intégration d'une telle expression reliant dz et dJ présente des difficultés car elle dépend du chemin considéré. A un facteur près, on trouve une intégrale hypergéométrique définie dans le cas où $\Re(c) > \Re(a) > 0$, |x| < 1, ici a = (1/3), c = (5/6), b = 0, ou encore une fonction bêta définie pour $\Re(p) > 0$, $\Re(q) > 0$, ici p = (1/3), q = (1/2)

$$F(a,b,c,x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} (1-tx)^{-b} dt,$$

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \ \Gamma(p) = \int_0^\infty t^{p-1} \exp(-t) dt$$

Les difficultés d'intégration sont illustrées dans [858] (p. 85 - 90) où l'on montre comment l'intégration sur un double contour de Pochhammer autour de [0,1] change

$$\int_0^1 J^{p-1} (1-J)^{q-1} dJ$$

en la multipliant cette valeur par un facteur $(1-\exp(2i\pi p))(1-\exp(2i\pi q))$. La fonction hypergéométrique F(a,b,c,x) est solution de l'équation différentielle à deux singularités x=0 et x=1, où $x\in\mathbb{C}$:

$$E(a,b,c): x(1-x)\frac{d^2F}{dx^2} + (c-(a+b+1)x)\frac{dF}{dx} - abF = 0.$$

Lorsque les paramètres a, b, c, sont réels et tels que c, c-a-b, a-b, non entiers, on peut définir sur $\mathcal{D} = \mathbb{C} \setminus \{] - \infty, 0] \cup [1, \infty[\}$ l'application de Schwarz :

$$Sch: J \in \mathcal{D} \longrightarrow (F(a, b, c, J): J^{1-c}F(a+1-c, b+1-c, 2-c, J)) \in \mathbf{P}^{1}(C).$$

Pour $|1-c|=(1/v_1), |c-a-b|=(1/v_2), |a-b|=(1/v_3)$ strictement plus petits que 1, l'image de \mathcal{H} par cette application est un triangle de la sphère de Riemann avec les angles (π/v_1) en $Sch(0), (\pi/v_2)$ en $Sch(1), et (\pi/v_3)$ en $Sch(\infty)$. On retrouve ainsi les groupes classiques de pavages par des isométries des surfaces de Riemann simplement connexes ([61] chapitre 1), avec les trois cas sphérique, euclidien et hyperbolique. On peut prolonger l'application de Schwarz à $\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$ par le principe de réflexion sur le bord de \mathcal{H} et fabriquer des transformations conformes ([858] p. 78) qui interprètent le lien entre J et λ_{Λ} montrant le caractère déterminant de ce qui se passe en certains points singuliers :

$$F(1/12,5/12,1,x): x=J(\tau)\in\mathbb{C}\longmapsto \tau\in\mathcal{H}/PSL(2,Z)$$
 d'inverse la fonction J ,

$$F(1/2, 1/2, 1, x) : x = \lambda_{\Lambda}(\tau) \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\} \longmapsto \tau \in \mathcal{H}/\Gamma(2)$$
 d'inverse la fonction λ_{Λ} .

Un tel prolongement permet effectivement de considérer un contour de Pochhammer et permet de comprendre la nature de la difficulté rencontrée. Pour les valeurs $a=(1/3),\,b=0,\,c=(5/6)$ de l'expression différentielle de H. Cohn entre dz et dJ, on a $|1-c|=(1/6),\,|c-a-b|=(1/2),\,|a-b|=(1/3)$. Ceci correspond à un cas euclidien de cristal plan hexagonal. On trouve dans les travaux de R. Dedekind [196] une approche complémentaire à ce qui précède, avec un lien explicite avec la fonction η . Il montre que la fonction $w(\tau)$ définie à une constante près par

$$w(\tau) = c \frac{J'(\tau)^{1/2}}{J(\tau)^{1/3} (1 - J(\tau))^{1/4}},$$

vérifie une équation différentielle hypergéométrique E((1/12), (1/12), (2/3)) permettant d'écrire w en fonction de J. La fonction η est elle-même une racine carrée de w à un coefficient près ([129] p. 135 ou [557] p. 180) telle que :

$$\eta(\tau)^{24} = \frac{1}{(48\pi^2)^3} \frac{J'(\tau)^6}{J(\tau)^4 (1-J(\tau))^3} = -\frac{1}{4^4\pi^6} \frac{\lambda'_{\Lambda}(\tau)^6}{\lambda_{\Lambda}(\tau)^4 (1-\lambda_{\Lambda}(\tau))^4}.$$

Pour aller plus avant, il est nécessaire de faire le lien entre ce que l'on vient de voir et l'équation hypergéométrique perturbée que l'on a mise en évidence ci-dessus en liaison avec la représentation monodromique définie par les matrices A_0 et B_0 . Ce point fait l'objet d'un travail en cours de développement, prévu pour être présenté à la cinquième conférence internationale "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics" de Kyiv, en juin 2003.

7. Approche par la double uniformisation

La comparaison de ce que l'on vient de voir avec les résultats du chapitre précédent suggère que dans certains cas la valeur λ_{Λ} puisse être choisie égale au module (μ^2/λ^2) d'un tore percé parabolique prolongeable en le tore Λ . En effet, l'équation $\mathbf{y}^2 = \mathbf{x}(\mathbf{x}-1)(\mathbf{x}-\lambda_{\Lambda})$ met en évidence trois racines $\alpha'=1$, s'=0, $\beta'=\lambda_{\Lambda}$, et ne définit bien l'équation diophantienne de départ qu'au coefficient ν_{31} près. De même, le tore percé est défini avec $\alpha=-1$, s=0, $\beta=(\mu^2/\lambda^2)$, au coefficient λ près. En approfondissant ce thème, on a construit la propriété de double uniformisation des tores percés, et on en a tiré les conséquences pour la théorie de Markoff. Le résultat essentiel obtenu est la relation profonde qui existe entre la fonction êta de Dedekind et l'opérateur de Laplace-Beltrami d'un tore. Ceci explique la décomposition en produit infini de la fonction η . Comme cette fonction est liée à beaucoup d'autres fonctions transcendantes, ceci explique l'existence de produits infinis pour toutes ces fonctions, notamment les fonctions thêta.

7.1. Une construction générale. En comparant la représentation des tores de module (μ^2/λ^2) du chapitre précédent au plan en λ_{Λ} , on fait en sorte que se correspondent des points de même ordre de ramification. Ainsi $(\mu^2/\lambda^2) = 2$ correspond à une ramification d'ordre 2 que l'on obtient avec $\lambda_{\Lambda} = 1/2$. De même $(\mu^2/\lambda^2) = 1$ correspond ainsi à une ramification d'ordre 3 que l'on obtient avec $\lambda_{\Lambda} = -\rho^2$. Ceci assure la cohérence avec la ramification de J, on l'observe sur le domaine de cette fonction entre des valeurs correspondantes qui sont réelles et qui valent J = 1 pour $\lambda_{\Lambda} = 1/2$, ainsi que J = 0 pour $\lambda_{\Lambda} = -\rho^2 = (1 + i\sqrt{3})/2$. On considère inversement des valeurs complexes λ_{Λ} se situant sur le bord $[(1/2), -\rho^2]$ du domaine S_4 de notre figure 7.8 de $[\mathbf{632}]$. Elles correspondent de façon bijective aux valeurs $J = J(\lambda_{\Lambda}) \in [0,1] \subset \mathbb{R}$. On pose ainsi $(\mu^2/\lambda^2) = \beta(J) \in [1,2] \subset \mathbb{R}$, avec β bijection croissante de $[0,1] \subset \mathbb{R}$ dans $[1,2] \subset \mathbb{R}$. On choisit alors $\Theta_{\alpha} = \lambda^2$, et on se ramène au cas où $\alpha = -1$, s = 0, $\beta = \beta(J)$, $p = \infty$. Ceci normalise le tore percé que l'on considère et donne un tore percé parabolique défini par les matrices A et B suivantes dans $SL(2,\mathbb{R})$

$$A = \left[\begin{array}{cc} \lambda \sqrt{\beta(J)} & \lambda \sqrt{\beta(J)} \\ \frac{\lambda}{\sqrt{\beta(J)}} & \frac{1+\lambda^2}{\lambda \sqrt{\beta(J)}} \end{array} \right], \ B = \left[\begin{array}{cc} \lambda & -\lambda \beta(J) \\ -\lambda & \frac{1+\lambda^2 \beta(J)}{\lambda} \end{array} \right].$$

En réalité, ces deux matrices sont définies au facteur réel $\lambda > 0$ près. Il y a tout un ensemble de tores différents qui peuvent convenir à la même valeur $\beta(J)$, et

qui ont donc des propriétés communes. Il n'y a aucune raison de se débarrasser ici du coefficient λ . Une analyse approfondie de cette situation a été faite et a conduit au théorème "Jugendtraum" de Kronecker ([214] tome 1, p. 236). Les deux matrices mises en évidence définissent un groupe libre dans $PSL(2,\mathbb{R})$ que l'on peut abélianiser pour introduire une courbe elliptique. Les endomorphismes du groupe libre qu'elles engendrent sont associés à des polynômes [633]. Ceci provient des résultats qui ont été démontrés pour les tores percés conformes paraboliques. Une méthode pour fabriquer une courbe elliptique associée consiste à utiliser les calculs de [375] (p.179) et à les prolonger pour la valeur $\lambda_{\Lambda} = -\rho^2$. En dehors de ce cas singulier qui ne pose d'ailleurs pas de problème ([747] ch VI), les valeurs λ_{Λ} sélectionnées sont telles que

$$\lambda_{\Lambda} = \frac{1}{2} + i \Im(\lambda_{\Lambda}), \ 0 \leq \Im(\lambda_{\Lambda}) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}, \ | \ \lambda_{\Lambda} \ | < 1, \ | \ 1 - \lambda_{\Lambda} \ | < 1.$$

Ceci permet de bien définir deux périodes engendrant un réseau Λ

$$\omega_1(\lambda_{\Lambda}) = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-\lambda_{\Lambda})}}, \ \omega_2(\lambda_{\Lambda}) = \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-\lambda_{\Lambda})}}.$$

D'où la construction effective d'une fonction elliptique associée à ce réseau

$$\wp_{\Lambda}^{\prime 2}(z) = 4\wp_{\Lambda}^{3}(z) - g_{2}\wp_{\Lambda}(z) - g_{3},$$

$$g_2 = \frac{4\nu_{31}^2}{3}(\lambda_{\Lambda}^2 - \lambda_{\Lambda} + 1), \ g_3 = \frac{4\nu_{31}^3}{27}(\lambda_{\Lambda} + 1)(\lambda_{\Lambda} - 2)(2\lambda_{\Lambda} - 1).$$

Pour $\lambda_{\Lambda} = -\rho^2$, on obtient $g_2 = 0$. La courbe elliptique correspondante, associée au réseau $\mathbb{Z}[\rho]$, est bien définissable ([748] p. 102) au moyen de l'équation rationnelle $y^2 = x^3 + 1$ utilisée ci-dessus pour analyser les informations différentielles données par H. Cohn. En effet, cette dernière est issue de l'équation $y^2 = 4x^3 - 3i\sqrt{3}\nu_{31}^3$ obtenue avec les expressions données pour g_2 et g_3 . Pour $\lambda_{\Lambda}=(1/2)$, on obtient $g_3 = 0$. La courbe elliptique correspondante, associée au réseau $\mathbb{Z}[i]$, est définissable ([748] p. 101) par l'équation $y^2 = x^3 + x$ déductible cette fois de $y^2 = 4x^3 - \nu_{31}^2 x$. La donnée du paramètre accessoire $\nu_{31} \neq 0$ permet de retrouver toutes les données de la courbe elliptique avec $e_3 = e_1 + \nu_{31}$, $e_2 = e_1 + \lambda_{\Lambda} \nu_{31}$. A une transformation conforme près de $\mathbb C$ construite par translation et rotation, on peut normaliser sans changer λ_{Λ} cette courbe elliptique en se ramenant à $e_1 = 0$, $e_3 = \nu_{31} = ||\nu_{31}|| \in \mathbb{R}^+$. Ayant normalisé le tore percé et le tore selon deux méthodes différentes, on s'attache alors à faire en sorte que le tore percé provienne du tore par simple extraction d'un point, sachant que les problèmes de métrique induite restent à vérifier. L'identification de e_1 et $e_3 = \nu_{31}$ sur le tore donne un grand cercle que l'on identifie sur le tore percé à un cercle de même longueur reliant la piqure à elle-même, et donc correspondant dans \mathcal{H} à la géodésique 0α où $\alpha = -1$. Ceci définit la transformation Υ de \mathbb{C} dans \mathcal{H} avec

$$\Upsilon(e_1) = -1, \ \Upsilon(e_2) = \infty, \ \Upsilon(e_3) = 0, \ \Upsilon(e_2 + e_3) = \beta.$$

La translation $t_{e_3}: z \to z + e_3$ de $\mathbb C$ correspond ainsi à la transformation A de $\mathcal H$ avec $A \circ \Upsilon = \Upsilon \circ t_{e_3}$. L'identification sur les autres bords avec la même transformation Υ entre les domaines fondamentaux respectifs et la translation $t_{e_2}: z \to z + e_2$ donne $B^{-1} \circ \Upsilon = \Upsilon \circ t_{e_2}$. Dans les conditions précédentes, lorsque J varie sur le segment retenu, λ_{Λ} varie sur l'arc associé, et τ varie dans son plan complexe. On peut imposer la contrainte $f(\tau) = 1 - J(\tau) = \wp_{\Lambda}^{\prime 2}(z)$, on obtient ainsi une relation entre J et z que l'on peut traduire sous forme différentielle. Ceci redonne les expressions

de Harvey Cohn. Le point intéressant dans cette construction très générale est que le domaine fondamental pour le groupe gp(A,B) a une forme très simple déduite des points $\alpha=-1,\ s=0,\ \beta=\beta(J),\ p=\infty$. Le nombre β étant fixé, ce domaine fondamental est bien déterminé. Il est assez facile de caractériser l'identification de ses bords correspondant à la donnée d'une valeur λ , et de comparer ce que donnent des valeurs λ différentes grâce à une affinité ayant pour base le bord de \mathcal{H} . Pour J=0, on trouve seulement $\beta=1$. Mais la construction que l'on vient de faire pour le bord de S_4 est plus générale et est extensible à tout $\lambda_{\Lambda} \in S_4$ où elle donne des tores percés hyperboliques.

7.2. Notions attachées au tore \mathcal{T} . Pour le tore \mathcal{T} on a $Teich(\mathcal{T}) = \mathcal{H}$ et $\mathcal{M}od(\mathcal{T}) = \mathcal{H}/PSL(2,\mathbb{Z})$. Chaque point du domaine fondamental $\mathcal{M}od(\mathcal{T})$ correspond à une classe d'équivalence du tore, c'est-à-dire une classe d'isomorphisme de courbe elliptique [791] (p. 203). On retrouve ainsi la surface modulaire percée à l'infini que l'on peut identifier à \mathbb{C} en tant que surface de Riemann grâce à l'invariant modulaire J. On donne dans [580] (p. 487-491) une description complète de la métrique de Peterson-Weil dans ce cas. Sur cet exemple existe un opérateur de Laplace-Beltrami Δ dont on trouve dans [287] (p. 41) la propriété caractéristique qui est d'être un opérateur différentiel de second ordre sur \mathcal{H} qui commute avec toutes les transformations suivantes sur les fonctions f définies sur le demi plan

$$T(\psi \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix})f(z) = f(\frac{az+b}{cz+d}).$$

Une telle transformation représente le groupe $PSL(2,\mathbb{Z})$, voire un groupe plus large comme $PSL(2,\mathbb{R})$, en tant que groupe d'opérateurs sur un espace fonctionnel dont on peut faire l'analyse harmonique [365]. Ceci est facilité par le fait que l'on a, pour tout $\overline{g} = \psi(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}) \in \Gamma_{\mathcal{H}} = PSL(2,\mathbb{Z})$ et pour le laplacien Δ une relation de commutation $\Delta T(\overline{g}) = T(\overline{g})\Delta$ qui conduit à penser à des vecteurs propres communs. Pour tout $\tau = \tau_1 + i\tau_2 \in Teich(T) = \mathcal{H}$, cet opérateur est écrit ici avec un signe

$$\boldsymbol{\Delta} = -\tau_2^2 (\frac{\partial^2}{\partial \tau_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tau_2^2}).$$

L'opérateur de Casimir qui a des propriétés comparables au précedent est défini dans [79] par $\mathcal{C}^* = -2\Delta$.

7.2.1. Formes automorphes et opérateur de Laplace - Beltrami. Les formes automorphes jouent un rôle particulier par rapport à ces opérateurs, notamment parce que les fonctions méromorphes sur une surface de Riemann \mathcal{H}/Γ sont données par les fonctions méromorphes du demi-plan de Poincaré \mathcal{H} invariantes par Γ , et que l'opérateur Δ se transporte lui-même de \mathcal{H} sur les surfaces de Riemann [680]. Comme la plupart des équations essentielles de la physique s'expriment en fonction de l'opérateur Δ et peuvent concerner des phénomènes relatifs à des objets modélisés par des surfaces de Riemann (que l'on peut chauffer, éclairer ou bien faire vibrer), l'étude de cette situation est très importante [362] [691]. Les formes automorphes se groupent elles-mêmes en familles ayant de propriétés particulières (formes d'ondes de Maass, formes modulaires holomorphes, etc...[98]). On peut songer à les utiliser pour obtenir des valeurs de fonctions particulières, comme les séries de Fourier ont par exemple été utilisées par Dirichlet pour démontrer un

certain nombre des valeurs de la fonction zêta fournies par Euler [217]. Une particularité importante est cependant que dans un certain nombre de cas, le spectre des valeurs propres de Δ possède une partie continue. Les choses sont donc plus compliquées qu'avec un laplacien euclidien ordinaire.

Plus précisément [286], supposons donnée une fonction automorphe de poids k pour le groupe $PSL(2,\mathbb{Z})$, avec la condition de définition écrite maintenant sous la forme

$$\forall \gamma \in PSL(2, \mathbb{Z}), \ \forall z \in \mathcal{H}, \ f(z) = (cz+d)^{-k} f(\gamma z).$$

Elle permet la définition d'une fonction sur $SL(2,\mathbb{R})$ avec l'expression

$$\Phi_f(\left[\begin{array}{cc}a&b\\c&d\end{array}\right])=(ci+d)^{-k}\ f(\left[\begin{array}{cc}a&b\\c&d\end{array}\right]i).$$

Pour tout $g\in SL(2,\mathbb{R})$ et tout $\gamma\in SL(2,\mathbb{Z})$ cette fonction vérifie du fait de l'automorphie de f

$$(C1): \Phi_f(\gamma g) = \Phi_f(g).$$

On a aussi pour toute matrice de rotation, et ceci est lié à la structure quotient de $\mathcal{H} \simeq SL(2,\mathbb{R})/SO(2,\mathbb{R})$

$$(C2): \Phi_f(g \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}) = \exp(ik\theta)\Phi_f(g).$$

Si l'on suppose que f est holomorphe, on obtient avec le laplacien Δ de $SL(2,\mathbb{R})$ (dont celui de \mathcal{H} est l'image) la condition

(C3):
$$\Delta \Phi_f = -\frac{1}{4}k(k-2)\Phi_f = -\frac{(k-1)^2 - 1}{4}\Phi_f.$$

Cette condition se simplifie sous la forme $\Delta \Phi_f = -s(s-1)\Phi_f$ si l'on se limite comme dans ce qui précède aux valeurs k=2s paires. Mais d'autres fonctions propres de Δ existent [365] [777] [79]. C'est en affaiblissant cette condition que Maass a inventé ses propres formes d'onde [499]. C'est aussi en étudiant cette situation que Selberg a trouvé sa célèbre formule généralisant celle de Poisson citée en 5.2, ainsi que les méthodes de Dirichlet pour évaluer les sommes de Gauss ou démontrer la loi de réciprocité quadratique [718]. Il y a deux conditions supplémentaires très importantes

$$(C4): \int_{SL(2,\mathbb{R})/SL(2,\mathbb{Z})} |\Phi_f(g)|^2 dg < \infty.$$

Cette première condition introduit un espace de Hilbert $L^2(SL(2,\mathbb{R})/SL(2,\mathbb{Z}))$ de fonctions de carré intégrable. On considère aussi

$$(C5): \int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} |\Phi_f(\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} g)|^2 dx = 0.$$

Cette seconde condition définit un sous-espace particulier L_0^2 dans le précédent, l'espace des "formes-pointes" dans lequel on peut identifier un sous-espace $A_k(\Gamma)$ isomorphe au sous-espace des formes $f \in S_k(\Gamma)$ qui s'annulent sur les pointes. Cet espace est un sous-espace du \mathbb{C} -espace vectoriel $\mathbf{M}_k(\Gamma)$ des fonctions automorphes.

7.2.2. Lien avec les représentations de $SL(2,\mathbb{R})$. Une conséquence importante de ce qui précède est que l'on peut en déduire une représentation régulière à droite, unitaire et de dimension infinie de $SL(2,\mathbb{R})$ dans l'ensemble des opérateurs unitaires de L_0^2 :

Pour tous
$$g, h \in SL(2, \mathbb{R}), \ R(g)\Phi_f(h) = \Phi_f(gh),$$

où pour tout $g \in SL(2,\mathbb{R})$ et Φ_f bien choisi $\Delta R(g)\Phi_f = R(g)\Delta\Phi_f$. Ceci décompose R avec des sous-espaces invariants pour Δ , c'est-à-dire de fonctions propres de Δ , et donc comme somme directe de réprésentations de $SL(2,\mathbb{R})$. Celles ci sont au demeurant toutes connues [365][777]. Ces représentations induisent des représentations des groupes fuchiens que l'on peut remonter dans $SL(2,\mathbb{R})$ par la proposition 1.4.

On trouve aussi ([778] chapitre III) des expressions en "série de Fourier" de K-fonctions de Bessel (remplaçant les sinusoides) où $x + iy \in \mathcal{H}$

$$f(x+iy) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \exp(2i\pi nx) \sqrt{y} K_{it}(2\pi y \mid n \mid),$$

$$K_s(z) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \exp(-\frac{z}{2}(u+\frac{1}{u})u^{s-1} du,$$

$$\frac{t^2+1}{4} \text{ valeur propre de } \Delta.$$

Une conjecture importante due à Selberg affirme que pour les groupes $\Gamma_0(n)$ associés à la théorie de Hecke ([739] ch3, [555] § 4.5) cette valeur propre qui correspond à s = (1+it)/2 est supérieure ou égale à (1/4). On donne dans [17] un système fini de générateurs de $\Gamma_0(p)$ pour p premier, ainsi que des formes automorphes associées. Ce que l'on vient de voir revient à dire que t est réel.

7.2.3. Lien entre le laplacien d'un tore et la fonction éta de Dedekind. On considère l'opérateur Δ sur un tore conforme \mathcal{T} défini par un paramètre complexe $\tau = \tau_1 + i\tau_2 \in \mathcal{T}eich(\mathcal{T}) = \mathcal{H}$. Pour représenter ce tore, on utilise [580] le plan complexe en $z \in \mathbb{C}$ et des coordonnées associées à un réseau $\Lambda = \mathbb{Z}\xi^1 \oplus \mathbb{Z}\xi^2$ données par :

$$\xi^1 = i \frac{\overline{\tau}z - \tau \overline{z}}{\tau_2}, \ \xi^2 = i \frac{\overline{z} - z}{2\tau_2}.$$

La métrique de \mathbb{C} définit une métrique induite sur le tore à partir de laquelle on peut calculer la mesure de Weil-Petersson à adopter, et avec laquelle le laplacien du tore peut être écrit simplement à partir du laplacien du demi-plan de Poincaré. Pour le laplacien de \mathcal{H} , en introduisant pour i = 1, 2 l'opérateur $\partial_i = \partial/\partial \xi^i$, on a

$$\Delta = -\frac{1}{2\tau_2^2} (|\tau|^2 (\partial_1)^2 - 2\tau_1 \partial_1 \partial_2 + (\partial_2)^2).$$

On trouve alors facilement des fonctions propres de Δ vérifiant les bonnes conditions au bord du parallélogramme de la figure précédente, de façon à pouvoir en déduire des fonctions sur le tore quotient

$$\psi_{m,n}(\xi) = \exp(2i\pi(n\xi^1 + m\xi^2), \ m, n \in \mathbb{Z}.$$

Les valeurs propres associées sont

$$\lambda_{m,n} = \frac{2\pi^2}{\tau_2^2} (m - n\tau)(m - n\overline{\tau}) = \frac{2\pi^2}{\tau_2^2} |m + n\tau|^2.$$

Par analogie avec ce que l'on sait pour les opérateurs sur les espaces de dimension finie, le déterminant du laplacien Δ sur le tore \mathcal{T} pourrait être envisagé comme un produit infini de ces valeurs propres

$$Det(\mathbf{\Delta}) = \prod_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 - (0,0)} \frac{2\pi^2}{\tau_2^2} \mid m + n\tau \mid^2.$$

Mais une telle définition qui fait apparaître un produit infini est insuffisante. On peut cependant la rendre rigoureuse en introduisant les séries d'Eisenstein $E(\tau, s)$. On décrit ici la méthode pour ce faire telle qu'elle est donnée dans [580] (p. 489). L'évaluation d'une telle série utilise la fonction êta de Dedekind η . La série d'Eisenstein est définie pour $\Re(s) > 1$ par

$$E(\tau, s) = \tau_2^s \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{1}{|m + \tau n|^{2s}} = \tau_2^s G_{2s}(\tau), \qquad g_2(\tau) = \tau_2^{-1} E(\tau, 1),$$

elle vérifie l'équation fonctionnelle

$$\pi^{-s}\Gamma(s)E(\tau,s) = \pi^{-(1-s)}\Gamma(1-s)E(\tau,1-s),$$

et possède une formule limite due à Kronecker en son pôle simple s=1 où apparaît η et la constante d'Euler γ

$$E(\tau, s) = \frac{\pi}{s - 1} + 2\pi(\gamma - \log(2) - \log(\sqrt{\tau_2} |\eta(\tau)|^2)) + O(s - 1).$$

La méthode consiste à utiliser un logarithme et à négliger une infinité de termes $2\pi^2$ pour définir seulement le nombre

$$\frac{\det(\mathbf{\Delta})}{\tau_2} = \exp(-\log \tau_2 (1 + E(\tau, 0)) - E'(\tau, 0)).$$

On utilise alors la formule de Kronecker et des expressions classiques pour les fonctions Γ pour en déduire des évaluations en s des deux termes égaux par l'équation fonctionnelle

$$sE(\tau, 1-s) = -\pi + 2\pi s(\gamma - \log 2 - \log(\sqrt{\tau_2} \mid \eta(\tau) \mid^2) + \dots),$$

$$\pi^{1-2s} \frac{\Gamma(1+s)}{\Gamma(1-s)} E(\tau, s) = \pi E(\tau, 0) + (-2(\log \pi + \gamma)E(\tau, 0) + E'(\tau, 0)\pi s + \dots).$$

La comparaison donne

$$E(\tau, 0) = -1, \ E'(\tau, 0) = 2(\log 2 - \log(\sqrt{\tau_2} | \eta(\tau) |^2),$$

c'est-à-dire avec une expression qui précède :

$$\frac{\det(\boldsymbol{\Delta})}{\tau_2} = \exp(-E'(\tau,0)) = \tau_2 \mid \eta(\tau) \mid^4.$$

Cette expression donne une signification particulière à la fonction de Dedekind par rapport à un déterminant construit avec l'opérateur de Laplace-Beltrami du tore. Elle permet de comprendre pourquoi cette fonction se décompose sous forme d'un produit infini particulier. En notant ici $q = \exp(2\pi i \tau) = \mathbf{q}^2$, on retrouve le produit donné dans le commentaire de R. Dedekind relatif au fragment XXVIII de B. Riemann [676] (p. 397)

$$\eta(\tau)^{24} = q \prod_{n>1} (1-q^n)^{24}.$$

Cette fonction a déjà été rencontrée comme définissant une forme automorphe de poids 12. Son expression est liée au discriminant $Disc(E_{\Lambda})$ de la courbe elliptique E_{Λ} attachée à un réseau $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\varpi_2$ correspondant à un \mathcal{T}_{Λ} pour lequel $\tau = \Im(\omega_1/\omega_2)$ et

$$\eta(\tau)^{24} = g_2^3 - 27g_3^2 = 16(e_1 - e_2)^2(e_2 - e_3)^2(e_3 - e_1)^2 = Disc(E_{\Lambda}),$$

$$J = \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27g_3^2} = \frac{1}{54} \frac{((e_1 - e_2)^2 + (e_2 - e_3)^2 + (e_3 - e_1)^2)^3}{(e_1 - e_2)^2 (e_2 - e_3)^2 (e_3 - e_1)^2}.$$

On a vu avec la branche principale du logarithme et pour une transformation de $PSL(2,\mathbb{Z})$ définie par une matrice de $SL(2,\mathbb{Z})$ que l'on avait

$$\log \eta(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}) = \log \eta(\tau) + \frac{1}{4}\log(-(c\tau + d)^2) + \pi i \frac{a+d}{12c} - \pi i s(d, c).$$

On peut résumer cette égalité en disant que η a une propriété d'automorphie de poids (1/2). Mais il faut pour cela introduire une racine $24^{i\grave{e}me}$ de l'unité permettant d'écrire

$$\eta(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}) = \chi_{\eta}(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}).(c\tau+d)^{(1/2)}\eta(\tau).$$

On utilise donc désormais la définition de [404] (p. 257) plus satisfaisante que celle que l'on a utilisée antérieurement pour les fonctions automorphes. On dit que η est une forme modulaire de poids (1/2) et de système de multiplicateur $P\chi_{\eta}$, où dans le cas le plus général $P\chi_{\eta}: \Gamma = PSL(2,\mathbb{Z}) \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ est une fonction telle que pour tout $\gamma \in \Gamma$, on ait $|P\chi_{\eta}(\gamma)|=1$, et si $P:SL(2,\mathbb{Z})\to PSL(2,\mathbb{Z})$ projection canonique $P\chi_{\eta}\circ P=\chi_{\eta}$. La fonction g_2 est quant à elle une fonction modulaire de poids 4 pour un système de multiplicateur trivial, d'où se déduit avec la modularité de poids 12 du discriminant $g_2^3-27g_3^2$ la propriété de modularité de poids 0 de J. Ces deux dernières fonctions peuvent à leur tour être considérées comme vecteurs propres d'opérateurs que l'on peut expliciter. Le discriminant est ainsi fonction propre des opérateurs de Hecke ([729] p. 168), opérateurs qui commutent tous avec le laplacien ce qui en donne l'analyse spectrale.

On renvoie à [664] (ch. 8, 9) pour toutes les vérifications complémentaires des calculs qui précèdent. Les conclusions importantes sont qu'il existe un lien profond entre la fonction de Dedekind et l'opérateur de Laplace-Beltrami du tore \mathcal{T} , et donc aussi celui de \mathcal{H} , et que ce dernier est relié en profondeur aux représentations unitaires dans un espace de Hilbert L_0^2 de dimension infinie du plus simple des groupes de Lie non compact $SL(2,\mathbb{R})$. On a d'ailleurs vu comment \mathcal{H} admet le quotient $PSL(2,\mathbb{R})$ comme groupe d'automorphismes, cette dernière propriété est donc parfaitement compréhensible. Le passage au tore permet l'apparition d'un produit infini interprétable comme partie maitrisable du déterminant d'un opérateur de Laplace-Beltrami Δ . Evidemment une question qui se pose est de savoir si la technique de résurgence de Ecalle [238] ne permettrait pas de placer les calculs précédents dans un cadre plus satisfaisant. Le lien mis en évidence dans ce qui précède entre fonction η et un opérateur [444] trouve une application particulière dans la théorie des champs [106], laissant apparaître l'existence d'une véritable construction fonctorielle pour cette théorie des champs, de portée beaucoup plus vaste que les développements classiques qu'ont permis la cyclotomie et le "Jugendtraum" de Kronecker [456].

7.2.4. Sommes de Gauss. La fonction $P\chi_{\eta}$ peut être étudiée de façon directe. Elle a un lien profond avec les sommes de Gauss ([129] (ch. IX), [472]) et c'est son comportement qui permet en réalité la démonstration cyclotomique de la loi de réciprocité quadratique. Au demeurant, c'est dans ce facteur que se concentrent en exposant d'une puissance les sommes de Dedekind. D'où également le lien entre ces sommes et la réciprocité quadratique. On trouve dans [436] (p. 51) une expression de ce multiplicateur utilisant le symbole de Jacobi :

si
$$c$$
 impair $\chi_{\eta}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ |c| \end{pmatrix} \exp(\mathcal{F} - 3c),$
si c pair $\chi_{\eta}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (-1)^{\frac{sgn(c)-1}{2}\frac{sgn(d)-1}{2}} \begin{pmatrix} c \\ |d| \end{pmatrix} \exp(\mathcal{F} + 3d - 3 - 3cd),$
où $\mathcal{F} = \frac{\pi i}{12}(a+d)c - bd(c^2 - 1).$

On peut vérifier à partir de là que l'on a bien affaire à une racine $24^{i\grave{e}me}$ de l'unité. Les sommes de Gauss sont données par

$$G(a,n) = \sum_{k=0}^{n} \exp(\frac{2i\pi ak^2}{n}).$$

Pour p premier impair et a non congru à 0 modulo p, si c = 1 ou c = -i selon que $p \equiv 1 \pmod{4}$ ou $p \equiv 3 \pmod{4}$, elles vérifient pour la transformée de Fourier discrète [176] (p.92):

$$\begin{pmatrix} a \\ p \end{pmatrix} = \frac{G(a,p)}{\frac{1}{2}\sqrt{p}(1+i)(1+i^p)} = \frac{c}{\sqrt{p}} \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} k \\ p \end{pmatrix} \exp(\frac{2i\pi ak}{p}).$$

On peut en déduire l'expression du nombre de classes d'idéaux d'un corps quadratique [349] (théorème 114 p.135). Si p et q sont premiers entre eux, la réciprocité quadratique se démontre avec G(p,q)G(q,p)=G(1,pq). Les sommes de Gauss vérifient aussi l'identité de Landsberg-Schaar dont on peut déduire la réciprocité quadratique [557] p. 153 [72] :

$$\frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{n=0}^{p-1} \exp(\frac{2i\pi n^2 q}{p}) = \frac{\exp(i\pi/4)}{\sqrt{2q}} \sum_{n=0}^{2q-1} \exp(\frac{-i\pi n^2 p}{2q}) \quad (p > 0, \ q > 0).$$

Il est remarquable que cette formule soit issue de la trace d'un opérateur d'évolution longitudinale associé à une équation de Schrödinger. On trouve une démonstration dans [22] à partir d'une équation de Schrödinger sur un espace de phase cylindrique, que l'on modifie pour le rendre toroïdal, ce qui d'ailleurs discrétise le temps.

7.2.5. Lien avec la fonction zêta de Riemann. Dans le cadre présenté s'introduit également la fonction zêta de Riemann. La série d'Eisenstein peut être étudiée de façon directe en tant que noyau reproduisant de l'opérateur autoadjoint qui étend l'opérateur laplacien sur $L^2(\mathcal{M}od(T))$. On a rappelé dans ce qui précède comment s'introduisait naturellement cette structure d'espace de Hilbert. Elle permet la définition d'un autre noyau reproduisant ([580] (p.426) ou [294]), le noyau de chaleur lié à l'opérateur elliptique laplacien. Dans le contexte plus général d'une variété $\mathcal M$ plongée dans un espace de dimension D ce noyau est donné par l'expression suivante

$$h(x, y; t) = \langle x \mid \exp(-t\Delta) \mid y \rangle = \sum_{n} \exp(-t\lambda_n) \langle x \mid n \rangle \langle n \mid y \rangle.$$

Il vérifie l'équation de la chaleur qui s'écrit compte tenu du choix fait pour le signe du laplacien $(\partial_t + \mathbf{\Delta}) h(x, y; t) = 0$. Il permet de définir le semi-groupe de la chaleur $\{\exp(-t\mathbf{\Delta}); t \geq 0\}$. La transformée de Mellin donne une fonction zêta $\zeta(x, y; s)$ qui vaut

$$\sum_{n} \frac{1}{\Gamma(s)} \int_{0}^{\infty} t^{s-1} \exp(-t\lambda_n) < x \mid n > < n \mid y > dt.$$

Elle détermine la fonction ζ_{Δ} généralisée suivante qui a la forme d'une trace :

$$\zeta_{\Delta}(s) = \int_{\mathcal{M}} \zeta(x, x; s) dx = \sum_{n} \lambda_n^{-s}.$$

On évoque dans [580] (p.429) et on approfondit dans [294] les développements de ces calculs vers la définition d'un η -invariant pour certains opérateurs elliptiques, pratiquement une signature d'une forme quadratique d'intersection, qui débouche sur le théorème de l'indice d'Atiyah-Patodi-Singer et des applications importantes en dimension 4 ([577]). Cet invariant est donc une généralisation de la fonction êta de Dedekind pour des objets plus larges que les surfaces de Riemann [570] [75]. L'application au cas où $\mathcal M$ est un tore est facile. Elle permet de définir de façon plus intrinsèque une fonction zêta ([459] p. 229) en utilisant de façon directe la trace d'une puissance du laplacien

$$\zeta_{\Delta}(s) = tr(\Delta^{-s}) = \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \backslash \{(0,0)} \lambda_{m,n}^{-s}.$$

La conjecture de Riemann [78] semble correspondre d'une certaine façon à ce qui se passe lorsque le tore que l'on considère est tel que τ tende vers un nombre entier, ce qui introduit à la limite une brisure de symétrie modifiant dramatiquement l'algèbre d'opérateurs engendrée par Δ sur laquelle on travaille. On peut construire un système dynamique pour ce cas dont la fonction de partition soit ζ_{Δ} . Il suffit de suivre la méthode de [142] dans son exposé très clair des travaux de [163] permettant de considérer la fonction ζ de Riemann elle-même comme fonction de partition d'un système dynamique (A, σ_t) avec A une C^* -algèbre et σ_t un groupe à un paramètre d'automorphismes de A. Inversement, le problème de construire un opérateur hermitien qui pourrait être selon Michael Berry [65] un hamiltonien gouvernant un système mécanique quantique à mécanique classique sous jacente chaotique et à temps irréversible correspond à la conjecture de Hilbert et Polya [829]. Un très récent article de Alain Connes [164] laisse penser que l'hypothèse de Riemann pourrait correspondre comme la formule de Selberg [718] à une formule de trace pour un tel hamiltonien [256] (theorem 9.5.2 p. 307). On peut comparer à ce que donnent les théories d'Arakelov de dimensions supérieures [457] (pp. 172-173). Une question importante paraît être de bien formaliser dans le contexte présenté la transformation de Mellin, comme une anti-équivalence particulière de catégories, de variétés abéliennes vers des algèbres d'opérateurs supportant des fonctions ζ . Une autre piste consiste à approfondir le lien qui est décrit dans [137] entre l'approximation de Apéry de $\zeta(3)$ et des équations de Lamé que cet article relie explicitement à l'équation de Markoff. Un projet consiste à considérer l'opérateur L que l'on a introduit ci-dessus en liaison avec les matrices A_0 et B_0 , à considérer des propriétés d'orthogonalité associées et à utiliser des méthodes analogues à celles développées dans [796].

7.2.6. Gaz de bosons et bruit en 1/f. Le formalisme précédent a été appliqué à la mécanique statistique des gaz de bosons. Il s'appuie sur le lien qui a été étudié par Ramanujan entre la fonction êta de Dedekind et les partitions d'entiers. Ceci se matérialise avec la fonction multiplicative τ_R de Ramanujan ([729] p. 156, [136] p. 57) donnant

$$\eta(\tau)^{24} = q \prod_{n>1} (1-q^n)^{24} = \sum_{n>1} \tau_R(n) q^n$$
, où $q = \exp(2\pi i \tau) = \mathbf{q}^2 = \exp(-h\nu/kT)$.

Ceci permet de définir une fonction de partition par mode où p(n) nombre de partitions de l'entier n associé aussi à la fonction η par la formule

$$Z(q) = q^{\frac{1}{24}} \eta(\tau)^{-1} = \prod_{n>1} \left(\frac{1}{1-q^n}\right) = \sum_{n>1} p(n) q^n = \frac{\exp(\pi i \tau/12)}{\eta(\tau)}.$$

Si $\sigma_k(n)$ désigne la somme des puissances $k^{i\hat{e}mes}$ des diviseurs de n, on obtient des grandeurs interprétables par analogie avec la mécanique statistique

l'énergie libre
$$F = -kT \sum_{n \ge 1} \sigma_{-1}(n) \exp(-nh\nu/kT),$$

l'énergie interne
$$E=h\nu\sum_{n\geq 1}\sigma_1(n)\exp(-nh\nu/kT),$$

l'entropie
$$S=k\sum_{n\geq 1}(h\nu/kT\sigma_1(n)+\sigma_{-1}(n))\exp(-nh\nu/kT).$$

Sur cette base, les fluctuations d'énergie dans un résonateur à quartz ont été évaluées [638], faisant apparaître un bruit quantique en (1/f). Au delà du cas du résonateur à quartz, il faudrait creuser le sujet précédent pour montrer comment donner dans une perspective plus générale une explication profonde du bruit en (1/f) que l'on rencontre si fréquemment dans la nature. Quelques pistes récentes ont commencé à être explorées. Elles font le lien avec les sommes de Ramanujan [643].

7.3. Notions attachées à un tore percé $T \setminus \{p\}$. L'espace de Teichmüller du tore percé est $Teich(T \setminus \{p\}) = \mathcal{H}$. On a aussi $\Gamma_{T \setminus \{p\}} = GL(2,\mathbb{Z})$. Ce groupe est noté $S^*L(2,\mathbb{Z})$ pour indiquer qu'il agit dans \mathcal{H} par transformations conformes et anticonformes. Les résultats obtenus sur les tores percés paraboliques permettent de se ramener à l'action de $SL(2,\mathbb{Z})$ dans le demi-plan de Poincaré pour décrire au quotient l'espace des modules $\mathcal{M}od(T \setminus \{p\})$ grâce à la surface modulaire percée. Ces données déduites de [578] (p. 153) sont intéressantes car elles ne correspondent pas à ce qui a été vu ci-dessus dans l'étude des tores percés conformes paraboliques. On a donné

$$Teich(T \setminus \{p\}) \simeq \mathcal{F}(\lambda, \mu) = \{(\lambda, \mu) \mid \lambda > 0, \mu > 0\},\$$

et l'on a décrit la façon dont $\Gamma_{\mathcal{T}\setminus\{p\}} = GL(2,\mathbb{Z})$ agit dans $\mathcal{F}(\lambda,\mu)$. Au quotient on identifie bien les classes d'équivalence difféomorphe (et donc conforme) sur le tore percé, c'est-à-dire les modules du tore percé. Ceci correspond au commentaire de la définition 1.6 de [706] (p.10). Tout se passe comme si \mathcal{H} correspondait à un modèle topologique de l'espace de Teichmüller, et $\mathcal{F}(\lambda,\mu)$ à un modèle géométrique décrit par une équation algébrique. Le lien entre ces deux modèles a été étudié en détail dans [421], mais ce travail devrait être repris à la lumière des considérations qui précèdent. Il est également très important de remarquer que la théorie de la

réduction qui a été présentée pour les tores paraboliques, va beaucoup plus loin que ce que donne la seule action de $\Gamma_{\mathcal{T}\backslash\{p\}} = GL(2,\mathbb{Z})$ sur $\mathcal{F}(\lambda,\mu)$. Généraliser un tel résultat est concevable en rentrant dans l'étude de la présentation des groupes de classes d'applications $\Gamma_{\mathcal{M}}$. Sans aller jusque là, on peut indiquer sommairement comment on retrouve les résultats déjà rencontrés au chapitre précédent avec les remarques formulées par [421] (p. 203) et issues de [419]. On traduit ce que dit Linda Keen sous la forme

$$\pi'(\chi) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ agit sur } \mathcal{F}(\lambda, \mu) \text{ par } (\lambda, \mu) \to (\frac{\mu}{\lambda^2 + \mu^2}, \frac{\lambda}{\lambda^2 + \mu^2}),$$
$$\pi'(\chi') = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ agit sur } \mathcal{F}(\lambda, \mu) \text{ par } (\lambda, \mu) \to (\frac{\mu}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}).$$

Ces deux matrices respectivement d'ordre 2 et 3 sont telles que leurs images par ψ dans $PSL(2,\mathbb{Z})$ engendrent ce groupe. On peut maintenant considérer que π' est un morphisme d'abélianisation, avec dans le groupe des automorphismes $Aut(\mathbf{F}_2)$ du groupe libre à deux éléments \mathbf{F}_2 engendré par A et B

$$\chi = (B, A^{-1}), \qquad \chi' = (AB, B^{-1}).$$

Il suffit alors de considérer l'action de ces deux automorphismes sur le triplet

$$(tr(B^{-1}), tr(A), tr(B^{-1}A^{-1})) = (\frac{1+\lambda^2+\mu^2}{\mu}, \frac{1+\lambda^2+\mu^2}{\lambda}, \frac{1+\lambda^2+\mu^2}{\lambda\mu}),$$

$$\chi \text{ donne } (tr(A), tr(B^{-1}), tr(AB^{-1})), \ \ \chi' \text{ donne } (tr(B^{-1}), tr(B^{-1}A^{-1}), tr(A)).$$

Plus généralement, le groupe $Aut(\mathbf{F}_2)$ agit grâce à π' sur $\mathcal{F}(\lambda,\mu)$. On a d'ailleurs $\pi'(Aut(\mathbf{F}_2)) = GL(2,\mathbb{Z}) = \Gamma_{T\setminus\{p\}}$. On a développé l'étude de cette situation, expliquant comment le groupe $\mathbf{T}_3 = \mathbf{T}^*(\infty,\infty,\infty)$ apparaît ici. Ce groupe a été mis en évidence avec le triangle curviligne **LMN**.

7.4. Interprétation géométrique de la double uniformisation. En comparant les deux cas du tore \mathcal{T} et du tore percé $\mathcal{T}\setminus\{p\}$, tout se passe comme si on observait dans l'espace la surface $x^2 + y^2 + z^2 = xyz$ et que l'on représente cette configuration dans \mathcal{H} . Les formes quadratiques donnent tout l'espace \mathbb{R}^3 , puis projectivement \mathcal{H} , et on sait faire agir $PSL(2,\mathbb{Z})$ sur ces espaces. Dans \mathbb{R}^3 on visualise cette surface, et on la représente projectivement par \mathcal{H} . On trouve ainsi une signification à l'action de $GL(2,\mathbb{Z})$ sur cette surface. La réduction porte ainsi une information beaucoup plus profonde que la simple inclusion d'un objet topologique dans un autre. Elle traduit la façon dont un objet géométrique est contenu dans un autre. On trouve ainsi une signification comparable à ce qui est expliqué dans l'article de B. Mazur [533] sur les doubles revêtements conformes. "C'est la conjonction de deux uniformisations (l'une en l'occurrence euclidienne et l'autre hyperbolique de type arithmétique, c'est-à-dire périodique par rapport à un groupe de congruence) qui crée une structure exceptionnellement riche sur les courbes elliptiques et entraine des implications profondes pour des questions arithmétiques (en fait [434] (ch.XII) la conjecture de Shimura Taniyama Weil démontrée par A. Wiles [844]: une courbe elliptique sur les nombres rationnels possède un fonction zêta provenant de formes modulaires de poids 2)." Ce que l'on vient de décrire entre le tore \mathcal{T} et le tore percé $T \setminus \{p\}$ donne deux uniformisations possibles pour le tore percé conforme.

8. Approche par le chaos quantique

Comme on vient d'étendre la définition du laplacien à des tores percés, une question qui se pose est de savoir s'il existe une interprétation mécanique correspondant à la théorie de Markoff classique, ou aux généralisations qu'on en a données. Il faut comprendre si dans ce nouveau contexte le spectre de Markoff pourrait être le spectre d'un opérateur à construire sur le tore percé. L'idée suivie par l'auteur pour étudier cette question a consisté à examiner ce que donne la théorie du chaos quantique sur différents tores percés non conformément équivalents puis à considérer la même question sur des surfaces de Riemann, comme le fait [325], enfin sur des espaces plus complexes.

Pour toute surface de Riemann \mathcal{M} définie par un groupe fuchsien on a introduit de façon naturelle la géométrie symplectique en considérant le premier groupe d'homologie $H_1(\mathcal{M}, \mathbb{Z})$ et le nombre d'intersections ([823] p. 105). Le formalisme de la mécanique hamiltonienne et de la quantification s'introduit à partir de là ([506] [307] [256] [223] [222] [262] [584] [122] [775]), avec encore beaucoup de choses à éclaircir [503]. Ceci permet de modéliser certains problèmes de mécanique au moyen de telles surfaces de Riemann. On notera qu'en mécanique des solides ordinaires le formalisme hamiltonien se met en place avec un espace de phases de dimension fini. Les choses deviennent un peu plus compliquées dès que l'on aborde des problèmes d'hydrodynamique car l'espace des phases devient de dimension infinie, obligeant à avoir recours à des outils comme les espaces de Hilbert. Mais même à ce prix d'autres domaines de la physique ne rentrent pas facilement dans ce formalisme dont l'un des grands intérêts a été de montrer l'importance de la topologie pour la physique (voir par exemple [121] [551]).

- **8.1. Quelques exemples.** On évoque ici trois exemples pour illustrer les limites du formalisme hamiltonien et les voies de son extension.
- La méthode du "scattering inverse" est utilisée pour intégrer des équations différentielles non-linéaire. Son interprétation hamiltonienne est due à L. D. Fadeev [251]. Elle s'applique à des équations très importantes de la Physique (Sine-Gordon, Lamé c'est-à-dire Schrödinger périodique à une dimension [257], Schrödinger non linéaire, Korteweg-deVries, etc.) admettant une présentation hamiltonienne avec des états dans un espace de Hilbert. Certains solitons entrent dans le domaine couvert par ce développement [674] qui dépasse largement le cadre des seules surfaces de Riemann. On renvoie pour approfondir le thème des solitons à [292]. Mais les surfaces de Riemann interviennent aussi dans ce cadre [232].
- Les équations de Maxwell classique (dont l'auteur voudrait formaliser le lien avec la théorie de Hodge) régissent la propagation des ondes et de la lumière. Elles n'entrent pas dans le formalisme hamiltonien sauf à étendre à une dimension infinie la dimension de l'espace des phases. Elles décrivent en effet des variations de champ électrique et magnétique en tout point de l'espace. La transformation de ces champs transporte de l'énergie et donne en l'absence de charge et de courant une équation d'onde qui décrit la propagation de l'onde qui transporte cette énergie. L'équation de Schrödinger appliquée à une fonction d'onde représentant un photon isolé donne exactement les équations de Maxwell. Avec un électron, elle donne l'équation de Dirac à la base comme ces dernières de l'électrodynamique quantique [613]. Le développement d'un cadre global commun pour les lois de la physique que l'on

vient d'évoquer passe donc bien par l'introduction d'un cadre hilbertien et d'une analyse dans celui-ci de l'équation de Schrödinger.

• La théorie quantique des champs a été introduite à la suite des travaux d'Einstein sur l'invariance par les transformations de Lorentz des équations de l'électromagnétisme de Maxwell

$$\nabla(E+iB) = q+ig, \ \frac{\partial}{\partial t}(E+iB) + i\nabla \times (E+iB) = j_e+ij_m.$$

Le souci de rendre ces deux équations invariantes par d'autres transformations $(E+iB) \to \exp(i\phi)(E+iB)$ a conduit à la théorie du champ conforme et à la tentative d'unifier la gravité aux autres forces de la nature par la théorie des cordes. Cette démarche a eu un temps fort avec l'article [649]. En réalité, cette théorie ne semble avoir qu'un intérêt restreint car il a été constaté que son domaine d'application reste limité. Il est cependant établi que cette théorie admet une présentation hamiltonienne avec des états dans un espace de Hilbert, une C^* -algèbre d'opérateurs et un groupe de symétries de jauge, c'est-à-dire la géométrie non commutative d'Alain Connes [158] [823] (p.548). Cette dernière devrait permettre d'étendre fonctoriellement le projet sans doute trop restreint de la théorie du champs conforme [847] [456]. Une quantification dans cette théorie se déduit des remarques qui précèdent, dont on trouve les éléments essentiels dans [271] [284] [795] [663] [580] [309] [83].

8.2. L'intégrale de pas de Feynman. On trouve un exposé générique de cette question en coordonnées les plus générales dans [315] (p. 67-91) et [300]. Sur une variété \mathcal{M} (par exemple une surface de Riemann compacte) contenue dans un espace de dimension D et munie d'une métrique $ds^2 = g_{ab}(\mathbf{q})dq^adq^b$ donnée avec des paramètres locaux de position $\mathbf{q} = (q^1, ..., q^D)$, on peut considérer l'espace des fonctions de carré intégrable $L^2(\mathcal{M})$ pour le produit scalaire

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_{\mathcal{M}} \sqrt{\det(g_{ab})} f_1(\mathbf{q}) \overline{f_2(\mathbf{q})} d\mathbf{q},$$

et l'opérateur de Laplace Beltrami, appelé laplacien, où (g^{ab}) inverse de (g_{ab}) :

$$\Delta = g^{ab} \partial_a \partial_b + (g^{ab} \Gamma_a + g_a^{ab}) \partial_b, \text{ où } \Gamma_a = \frac{\partial \log \sqrt{\det(g_{ab})}}{\partial a^a}.$$

Les paramètres d'impulsion, opérateurs hermitiens adaptés au produit scalaire introduit, ont une forme particulière :

$$p_{-a} = -i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial q^a} + \frac{\Gamma_a}{2}\right).$$

L'opérateur associé à l'énergie est défini à partir de la variable temps :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$$

L'équation de Schrödinger ([591] p. 45) dépendant du temps pour une particule de masse m se déplaçant dans un champ potentiel $V(\mathbf{q})$ indépendant du temps sur la variété \mathcal{M} s'écrit alors avec un hamiltonien

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{q},t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\mathbf{\Delta} + V(\mathbf{q})\right]\psi(\mathbf{q},t) = H\psi(\mathbf{q},t).$$

Dans certains cas elle possède une unique solution générale ([823] p. 549) donnée par une intégrale de Feynman construite à partir d'une amplitude de probabilité

 $K(\mathbf{q}^{"},t^{"};\mathbf{q}',t')$ qu'une particule quitte sa position initiale pour atteindre sa position finale, et grâce à laquelle on peut décrire l'évolution dans le temps de la fonction d'onde ψ duale de la particule que l'on considère

$$\psi(\mathbf{q}, t) = \int_{\mathbb{R}^D} \sqrt{g(\mathbf{q}')} K(\mathbf{q}, t'; \mathbf{q}', t') \psi(\mathbf{q}', t') d\mathbf{q}'.$$

Même si le potentiel $V(\mathbf{q})$ est nul ce calcul peut être fait [431] en s'appuyant sur les géodésiques de \mathcal{M} . En supposant le système global stable et isolé, c'est-à-dire dans un état stationnaire, l'énergie totale du système est une constante qui est une valeur propre E de H avec laquelle on a $\psi(\mathbf{q}, t) = \psi(\mathbf{q}, 0) \exp(-iEt/\hbar)$ et

$$E\psi(\mathbf{q},0) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \mathbf{\Delta} + V(\mathbf{q}) \right] \psi(\mathbf{q},0).$$

8.3. Cas de l'oscillateur harmonique quantique. On trouve une équation comparable dans le cas de l'oscillateur harmonique quantique à une seule dimension D=1, où $V(\mathbf{q})=(1/2)m\omega^2\mathbf{q}^2$ et $\mathbf{\Delta}=\partial^2/\partial\mathbf{q}^2$, et avec les polynômes de Hermite ([632] pp. 295-296) les seules énergies totales possibles $E_n=E_0+n\hbar\omega$ et le vecteur ket $\mid n>=\psi_n(\mathbf{q},0)$ associé à chacune d'elle. Ceci donne aussi la forme hermitienne à considérer pour laquelle ces vecteurs ket forment une base orthonormée de l'espace de Hilbert des fonctions associées. Sur cet espace s'introduisent les trois opérateurs auto-adjoints qui correspondent aux observables de position, d'impulsion et d'énergie utilisées :

$$\mathbf{Q} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\mathbf{q}, \ \mathbf{P} = \frac{\mathbf{p}}{\sqrt{m\omega\hbar}}, \ [\mathbf{P}, \mathbf{Q}] = i \neq 0,$$

$$H = \hbar\omega(\mathbf{A}\mathbf{A}^* - \frac{1}{2})$$
 où $\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{Q} + i\mathbf{P}) \neq \mathbf{A}^*.$

On a également sur cet espace un opérateur unitaire naturel ([504] p.75) qui s'écrit

$$(\frac{H}{\hbar\omega} + \frac{1}{2} + i)(\frac{H}{\hbar\omega} + \frac{1}{2} - i)^{-1},$$

il est utilisable pour étudier l'hypothèse de Riemann associée selon les méthodes de [164] et [142]. On peut enfin développer ([632] p.296) une approche statistique de la distribution des états d'énergie E_n lorsque cet oscillateur de pulsation $\omega = 2\pi\nu$ est en contact avec un milieu extérieur beaucoup plus grand que lui et agissant comme thermostat de température constante T. Les états d'énergie sont quantifiés en $\hbar\omega = h\nu$, où h est la constante de Planck et $\hbar = (h/2\pi)$.

8.4. Le chaos quantique et les géodésiques. Ce que l'on vient de résumer pour l'oscillateur harmonique se généralise en la formulation hamiltonienne que l'on a donnée pour toute variété, et donc toute surface de Riemann \mathcal{M} . Ceci condense de l'information sur sa géométrie et conduit naturellement à une problématique de quantification en considérant le spectre des valeurs propres associé à l'opérateur apparaissant dans l'équation de Schrödinger. Une relation peut être établie avec les orbites géodésiques périodiques de \mathcal{M} grâce à la formule de trace issue des travaux de Selberg [326] [829]. C'est l'un des développements récents de la théorie du chaos quantique. Dans [153] (p. 59) on indique que pour décrire les géodésiques

de $\mathcal M$ on peut considérer un hamiltonien pseudo-différentiel $\hbar\sqrt{-\Delta}$ et se ramener à l'équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi = \hbar \sqrt{-\Delta}\psi.$$

Une simplification par \hbar se produit dans cette équation et sa solution est donnée par le groupe à un paramètre $U(t) = \exp(-t\sqrt{-\Delta})$. Cette remarque conduit à se poser la question de la nature géométrique profonde de la constante de Planck ([537], [256] : "la constante de Planck pourrait ne prendre que des valeurs telles que l'indice topologique soit un nombre entier."). Dans l'approche statistique associée la fonction de partition quantique associée est

$$Z(t) = tr(U(t)) = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-i\mu_n t),$$

où les μ_n correspondent aux solutions stationnaires de forme $\exp(-i\mu_n t)\psi_n(\mathbf{q},0)$ avec

$$\Delta \psi_n(\mathbf{q}, 0) = -\lambda_n \psi_n(\mathbf{q}, 0), \quad \mu_n = \sqrt{\lambda_n}, \quad \lambda_1 = 0 < \lambda_2 \le \dots \le \lambda_n \le \dots$$

Elles se déduisent des valeurs propres λ_n de l'opérateur de Laplace associé à la variété \mathcal{M} . Il existe toute une littérature sur ce sujet, sachant que cet opérateur est la plupart du temps défini comme l'opposé de celui que l'on vient d'utiliser ([680] [691] articles de I. Chavel pp. 30-75 et M. Shubin pp. 226-283).

8.5. Application à la théorie de Markoff. Lorsque la variété \mathcal{M} n'est pas compacte, le spectre n'a pas de raison d'être discret et peut donc contenir une partie cantorienne ou une partie continue. On ne voit plus alors apparaître l'équivalent de la constante de Planck comme dans le cas de l'oscillateur harmonique quantique. On a vu ci-dessus comment l'identité de Landsberg-Schaar sur les sommes de Gauss est issue de la trace d'un opérateur d'évolution longitudinale associé à une équation de Schrödinger [22]. On a indiqué comment à partir d'un espace de phase cylindrique rendu toroïdal on retrouvait la réciprocité quadratique intimement liée à la fonction êta de Dedekind, elle même liée au tore. Mais on a vu aussi que cette approche discrétise le temps et fait disparaître l'équation de Schrödinger avec un paramètre temporel continu. Ceci semble indiquer que pour aller plus loin dans la généralité du formalisme de l'équation de Schrödinger, il faudrait considérer les temps comme les autres paramètres observables.

La question qu'on se pose alors est de savoir si ce formalisme pourrait interpréter le spectre de Markoff lorsque l'espace des phases \mathcal{M} est le tore percé parabolique mis en évidence par Harvey Cohn dans [143]. Il faudrait pour progresser dans cette voie donner une bonne équation de Schrödinger à considérer. On devrait s'assurer que l'on n'est pas alors dans un cas de nombre fini de ses solutions pour une telle équation, le minimum intervenant dans la théorie de Markoff pouvant alors correspondre à une minimisation de l'énergie. Ce programme de travail de l'auteur n'en est qu'à ses débuts, de sorte que peu de résultats peuvent encore être donnés quant à l'approche proposée. Une piste pour progresser dans cette voie pourrait être d'expliciter la formulation hamiltonienne quantique associée aux oscillateurs à vérouillage de phase de Michel Planat [634]. Il semble bien qu'ils correspondent à un espace de phase torique percé, constituant donc un modèle plus sophistiqué que l'oscillateur quantique à une dimension. La question de la

dégénérescence discrète éventuelle de l'équation de Schrödinger dans ce cas est un problème intéressant.

9. Quelques thèmes de réflexion connexes

9.1. Liens avec les fibrés vectoriels et la K-théorie. Pour toute surface de Riemann \mathcal{M} le théorème d'uniformisation de Poincaré, Koebe et Klein a donné des domaines $\mathcal{U} \subset \mathcal{S}^2$ et des transformations holomorphes injectives t de \mathcal{U} dans \mathcal{M} telles qu'en tout point $x \in \mathcal{U}$, t uniformise localement \mathcal{M} au point t(x), cartographiant le voisinage de ce point dans M. Aujourd'hui, ce résultat a finalement été pris comme définition des surfaces de Riemann par H. Weyl [842]. Les groupes fuchsiens permettent de traiter algébriquement certaines de ces surfaces, et l'on reconstruit dans l'algèbre des fonctions automorphes associée les invariants caractéristiques. On trouve dans [543] (p. 53-54) l'idée que les facteurs d'automorphie correspondent à des cocycles (la cohomologie est là!) et cet auteur montre qu'ils sont en correspondance bijective avec des fibrés vectoriels sur la surface d'une façon qui interprète les fonctions automorphes de poids 2k comme des sections d'un fibré L_k^* sur un compactifié \mathcal{M}^c déterminé par un facteur d'automorphie canonique (la K-théorie apparaît!). Cette remarque est très importante pour comprendre pourquoi la théorie de Markoff détermine des fibrés exceptionnels et des hélices du plan projectif $P_2(\mathbb{C})$ (voir [318], [229], [686], [597], [598], [304], [305], [230], [231]). Il serait d'un grand intérêt d'associer d'autres fibrés et hélices aux équations $M^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(a,\partial K,u)$ mises en évidence dans le présent ouvrage, ne serait-ce que pour mieux comprendre la structure des fibrés vectoriels sur différents types de variétés et les classifier [797] [473] [719] [432] [433] [381] [39]. On conjecture que ceci est possible. Cette recherche s'inscrit dans la grande tradition des analogies entre corps de nombres et corps de fonctions chère à André Weil [834], qui a conduit aux schémas d'Alexandre Grothendieck [750] (A.9), puis à la cohomologie étale pour généraliser la théorie de Galois [544], à la géométrie d'Arakelov [764], enfin à la cohomologie motivique [476] et à la résolution de la conjecture de Langlands sur les corps de fonctions [462]. Cette approche a permis la résolution de l'hypothèse de Riemann pour les courbes de genre quelconque sur un corps fini par André Weil [837], puis pour toutes les variétés sur un corps fini par Pierre Deligne [197] et à la résolution de la conjecture de Langlands sur les corps de fonctions [462] [759]. Un résumé rapide de la démarche historique se trouve dans [120] ou [542] (p. 97-100). Pour d'autres perspectives on renvoie à [306] [105].

Une conséquence du projet de recherche que l'on vient d'évoquer pour les fibrés est de donner une interprétation "automorphe" générale des K-groupes $K_i(R)$ de la théorie de D. Quillen. L'importance de cette question est clairement mise en lumière dans [833] (p.17-18). Quant à la définition classique des groupes $K_i(R)$, on la trouve dans [679], ou plus directement dans [20]. Sur ceux-ci se transposent des résultats de la théorie algébrique des nombres comme le théorème des unités de Dirichlet [679] (p. 288). Dans ces résultats, R désigne un anneau d'entiers d'un corps F extension finie de $\mathbb Q$ et il y a un lien profond entre ces K-groupes et la fonction ζ_F du corps F [481] [833] [104] [58]. Il est aussi connu que les fonctions zêta sont liées aux sommes de Dedekind et à la géométrie torique qui a été développée pour faire un lien entre la théorie des ensembles convexes dans un réseau et la géométrie algébrique [865] (p. 224) [188] [645]. Enfin le lien entre la géométrie torique et les fonctions automorphes est clairement explicite dans des travaux tels que [81] [173]

[174]. On trouve des développements plus directs sur le lien entre les fonctions zêta (ou L) et les sommes de Dedekind dans des travaux tels que [768] [711].

9.2. Lien avec les fonctions zêta. L'apparition des fonctions zêta peut se comprendre avec une remarque faite lors de l'évocation des fonctions thêta. Les espaces de fonctions automorphes de poids successifs se déduisant par des exponentiations de groupes, on peut faire apparaître naturellement ([215] p. 297) les nombres de Bernouilli (ici $\mathbf{b}_n = (-1)^{n+1}b_{2n} > 0$) avec une "demi-formule de Poisson" qui concerne des exponentielles successives d'un opérateur d, et donne la fonction de partition Z de l'oscillateur harmonique dans la théorie de Boltzmann et Planck en remplaçant d par $-(h\nu/kT)$

$$-\sum_{k\geq 1} \exp(kd) = \frac{\exp(d)}{\exp(d) - 1} = \frac{1}{1 - \exp(-d)} = d^{-1} + \frac{1}{2} + \sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1} \mathbf{b}_n \frac{d^{2n-1}}{(2n)!}.$$

Appliquée à une fonction analytique, une telle formule donne la formule classique d'Euler et Mac-Laurin ([215] p. 302 [405] ch. 25). Cette formule est applicable aux structures car elle est de nature fonctorielle [288]. On trouve dans [788] une traduction pour les algèbres de Kac-Moody. On sait aussi passer d'une algèbre de Lie à un groupe de Lie par l'exponentielle qui transforme des sommes en produits, des traces en déterminants ([25] p. 116-119). On trouve dans [654] (p.175) les conséquences pour les catégories correspondantes notamment les équivalences de catégories entre groupes de Lie et algèbres de Lie, et dans [654] (p. 97) comment l'algèbre enveloppante universelle d'une algèbre de Lie possède une structure naturelle d'algèbre de Hopf. Dans [321] (p. 27) apparaît la dualité entre les groupes algébriques affines et les algèbres de Hopf commutatives de type fini, le cas semi-simple de dimension finie correspondant aux groupes finis. Le lien avec les catégories tressées et les familles d'arbres est essentiel [559] [460]. Dans [130] (p. 4-5) on indique aussi comment la catégorie des groupes quantiques devrait être définie comme duale (c'est-à-dire antiéquivalente) à celle des algèbres de Hopf. Pour d'autres [508] les groupes quantiques ne sont autres que les algèbres de Hopf, ce qui ne satisfait pas l'auteur du présent texte. Comme il est fait de façon explicite une relation avec la présentation hamiltonienne de la mécanique et de sa quantification depuis les travaux de l'école de L. D. Fadeev [251], on est conduit naturellement à l'idée de comparer les variétés abéliennes aux groupes quantiques. L'introduction de [130] rappelle comment se sont développés ces travaux de mécanique [568] pour déboucher sur les travaux de A. Connes ([158], [161]) avec lesquels il y a donc une dualité profonde. Dans la dernière formule donnée l'exponentielle permet de passer d'un groupe $K_{2k}(\mathcal{M})$ à un espace $\mathbf{M}_k(\Gamma)$ dont la dimension est connue ([543] p.45). La somme de gauche correspond au passage à la limite d'une somme de groupes $\mathbf{M}_k(\Gamma)$ pour construire l'algèbre graduée $\mathbf{M}(\Gamma)$. Celle de droite correspond à une construction particulière restant à formaliser de façon précise (un espace classifiant). Les groupes $K_{2k}(\mathcal{M})$ sont dans cette perspective comparables à des groupes de cohomologie $H^*(\mathcal{M}, \mathbb{Z})$ et donc à $\mathbf{M}(\Gamma)$. Les conjectures de Lichtenbaum qui se positionnent dans cette perspective ([763] p. 107) s'écrivent alors avec k pair

$$\frac{CardK_{2k-2}(\mathcal{M})}{CardK_{2k-1}(\mathcal{M})} = \frac{\mathbf{b}_k}{k} 2^r.$$

9.3. L'automorphie de la fontion êta liée au nombre d'or. L'automorphie de η est la propriété caractéristique de cette fonction [792] qui donne naissance

à la somme de Dedekind s, et qui a comme conséquence l'existence de la théorie développée dans les chapitres précédents. Cette remarque conduit à l'idée de regarder dans les travaux qui sont relatifs à l'opérateur de Lagrange-Beltrami ou dans ceux sur les représentations unitaires de dimension infinie des algèbres de Lie comme $SL(2,\mathbb{R})$ où l'on pourrait utiliser les résultats qui ont été développés autour des généralisations de l'équation de Markoff. On trouve dans [404] (p.270) mention d'un résultat qui évoque nos travaux. Soit $\theta_a(S) = [0, \underline{S^*}, \underline{a}]$ un algébrique de degré 2 tel que $S = (a_0, a_1, ..., a_n)$ est une suite telle que $S = S^*$. On considère

$$f_c(\tau) = q^c \prod_{j=1}^{j=\infty} (1 - q^j)^{a_{j-1}}$$
 où $q = \exp(2\pi i \tau)$,

Cette expression définit une fonction modulaire au sens de [404] (p. 257) pour un groupe $\Gamma(n)$ si et seulement si on a

$$c = \frac{(n+2)(a+\sum_{j=0}^{n} a_j)}{24} - \frac{1}{4(n+2)} \sum_{j=1}^{n+1} j(n+2-j)a_{j-1}.$$

Avec le nombre d'or $\theta_1(S) = [0, \underline{1}]$ qui donne n = 0, la valeur c que l'on obtient est c = (1/24). On retrouve ainsi la fonction η de Dedekind. Le lien avec le pentagone que traduit ce dernier cas apparaît aussi dans l'identité pentagonale d'Euler ([249] 1748) citée dans [557] p. 143 ou [405] ch. 12, décomposant η en série de Fourier et permettant son interprétation comme inverse d'une fonction de partition d'un ensemble d'oscillateurs indépendants de fréquences multiples d'une fréquence de base :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n q^{\frac{n(3n+1)}{2}} = \prod_{j=1}^{j=\infty} (1 - q^j).$$

On peut également préciser le lien avec le pavage de Penrose ([158] fig. II.3. p. 89) qui donne de son côté avec la construction de Vaughan Jones une C^* -algèbre canonique et pour premier indice non entier d'un facteur de type II₁ le nombre d'or ([158] p. 507-508, [162]). La démonstration même de ce dernier résultat montre bien le lien qui existe avec les fonctions modulaires et les surfaces de Riemann et les noeuds. Remarquons que la formule donnée pour f_c débouche plus généralement sur la définition de fonctions modulaires données par des produits de fonctions η , ce qui physiquement correspond à des ensembles d'oscillateurs indépendants. Pour $n \in \{2, 3, 4, 6, 12\}$ on trouve dans [739] (p. 49) de telles expressions pour les surfaces X(n), tout comme dans [483] pour les surfaces $X_0(n)$ de genre 1. Il y a là un sujet à creuser pour lequel on donne quelques références [171] [442] [500] [817] [694] [677] [603] [523] [540] [677] [483] [351] [504] (p. 366).

9.4. Lien avec des espaces topologiques plus généraux. Le lien avec les espaces lenticulaires, qui sont eux-mêmes liés à la loi de réciprocité quadratique ([89] p. 365 [762] p. 108) et plus généralement à l'invariant η des formes d'espaces sphériques, est approfondi dans [493] [294] [295] [350]. Ceci donne tout un ensemble de développements débouchant sur des sujets comme la K-théorie équivariante, les complexes de Koskul, ...[759]. L'invariant êta de Dedekind que l'on a utilisé pour nos travaux admet en réalité une généralisation profonde qui a été mise en lumière avec les travaux d'Atiyah, Patodi et Singer vers 1975. On trouve dans [570] une synthèse sur ce sujet faite il y a une dizaine d'années qui met bien en

évidence le rôle des points cône et des bords de surface (la propagation de la chaleur est perturbée par les bords et les points cônes). Un lien explicite est fait avec les travaux de F. Hirzebuch ([354], [355]) qui mettent eux-mêmes l'accent sur le lien entre singularités et fractions continues ([461] ch.II, [601] p.95). L'invariant êta joue le rôle d'un polynôme cyclotomique infini, laissant imaginer qu'un nouveau "Jugendtraum" plus vaste peut être énoncé, lié aux variétés abéliennes et à des invariants combinatoires à préciser ([280] [366]), à la géométrie non commutative [519], voire à une théorie du corps de classe non commutative [378] [379]. Derrière ces sujets se trouvent la description des singularités isolées des surfaces et la correspondance de McKay [406] [382] [548] [853] [798] (p. 72-89) [216] [455] pour la résolution par les courbes exceptionnelles et les singularités rationnelles A-D-E, la dualité étrange d'Arnold et la formule de Verlinde, les diagrammes de Dynkin [289] [228] [280] [650], les formes quadratiques [237] [225] [550], les noeuds et leur monodromie [486] [806] [860] [868], les modules de Verma et les systèmes de poids [695] [694] [523], la théorie de Galois différentielle [312] [662] [405] [68], la théorie de la représentation des algèbres de dimension infinie et les conséquences qu'elle a pour l'étude de fonctions spéciales utiles à la physique [110] [234] [404] [606] [796] [800], les lois de réciprocité plus générales [276] [277] [278] [101] [207] [328] [341] [388] [351] [60], une théorie non commutative du corps de classe étroitement liée à la cohomologie [379] [388] et à la conjecture de Riemann [50].

10. Une perspective globale en guise de conclusion

On a décrit dans ce qui précède plusieurs pistes de généralisation de la théorie de Markoff :

- Par le calcul des fractions continues, on a mis en évidence des équations diophantiennes $M^{s_1s_2}(b,\partial K,u)$ plus générales que l'équation classique de Markoff $M^{++}(2,0,0)$. On a montré comment les résoudre, ainsi que le lien avec le groupe du triangle et $GL(2,\mathbb{Z})$ qui le contient.
- Par l'étude géométrique des tores percés, on a montré que l'équation de Markoff $M^{++}(2,0,0)$ permet la description de tous les tores percés paraboliques. On a également montré que nos équations $M^{s_1s_2}(b,\partial K,u)$ apparaissent dans l'étude générale des tores percés et ont un lien avec des pinceaux de coniques et un groupe libre à deux générateurs qui existe dans ce contexte. On a également trouvé dans ce contexte d'autres équations permettant la description de tous les tores percés hyperboliques.
- En se limitant aux surfaces de Riemann dont le revêtement conforme est le demi-plan de Poincaré, on a montré qu'une généralisation naturelle de la théorie de Markoff est la théorie de Teichmüller. Ceci a permis de faire le lien avec des équations diophantiennes plus générales ayant des caractéristiques analogues à celle de Markoff, et éventuellement plus de variables. On a identifié un cadre plus général, celui des domaines de Riemann, où des résultats plus généraux existent. L'équation que l'on considère apparaît dans ce contexte comme liant les caractères de la représentation du groupe de Poincaré que l'on considère.

Le présent chapitre a exploré ce qui concerne les surfaces de Riemann, et on y a intégré dans chaque paragraphe différentes perspectives pour des travaux futurs

sur lesquelles on ne revient pas ici. Certains sujets importants ont été laissés de côté que l'on mentionne pour mémoire :

- L'analyse harmonique non commutative [316] et tous ses développements obtenus en considérant les mouvements décrits par des points sur des courbes d'une surface de Riemann. Cette théorie diffère de l'analyse harmonique commutative développée sur la surface de Riemann dans l'esprit de [778] (chapitre 3). Dans différents cas, ce mouvement peut être décomposé selon des mouvements sur des géodésiques correspondant aux générateurs du groupe de Poincaré de la surface. Une telle approche peut mener à des équations différentielles dont on a laissé de côté l'étude dans ce qui précède. Sur les tores percés on renvoie à [134] qui s'est inspiré des travaux originaux de Poincaré pour décrire les équations possibles et à [312] pour l'approfondissement de ce sujet qui a conduit aux théories de Picard-Vessiot et Drach ainsi qu'à une théorie de Galois spécifique.
- Le lien avec la théorie des tresses et des noeuds a été à plusieurs reprises évoqué. La relation avec les développements qui précèdent est assurée par une construction d'Ivanov [383]. Soit \mathcal{M} une surface de Riemann possédant un nombre fini de trous. En collant des disques fermés sur tous les trous de \mathcal{M} , on fabrique une surface compacte \mathcal{N} . Les difféomorphismes $\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ donnent des difféomorphismes $\mathcal{N} \to \mathcal{N}$, d'où un homomorphisme canonique surjectif de $\Gamma_{\mathcal{M}}$ dans $\Gamma_{\mathcal{N}}$. Son noyau est le groupe des tresses $B_n(\mathcal{N})$, où n est le nombre de trous de la surface \mathcal{M} . Ceci permet d'expliciter le lien avec l'étude des noeuds rationnels, les "rational tangles" de Conway ([575] ch.9, [414]) liés aux fractions continues et qui sont utilisés dans certaines applications à la recombinaison des enzymes et de l'ADN [771] [247] [202] [407] [113] [697].
- La théorie des dessins d'enfants [54] [317] [398] [495] [823] (p. 99) a été très peu évoquée. Son développement en dimension supérieure est envisageable. Son analogie avec différents travaux d'astronomes sur la forme cristallisée du vide quantique est éclairante [469] [785]. Plus généralement d'ailleurs tous les développements qui ont été présentés autour des surfaces de Riemann permettent de comprendre des travaux contemporains de physique qui leur donnent une nouvelle importance pour les applications [551] [190]. On a évoqué le lien avec les solitons [557] (ex. 2, p. 91) [53] [292] pour lesquelles on peut généraliser la démarche qui précède. Mais l'invariant êta semble posséder dans ce contexte une importance fondamentale, comme s'il était lié à l'énergie du vide quantique et à ses infinies vibrations élémentaires, pourquoi pas au bruit en 1/f sous-jacent au bruit de fonds de l'univers créé par la singularité du Big Bang rendant sa géométrie hyperbolique?

Les problèmes que l'on a abordés dans le présent chapitre concernent essentiellement la théorie de Teichmüller sur les surfaces de Riemann et les fonctions modulaires. On a cherché à comprendre comment ils sont liés à des problèmes non résolus d'une grande actualité : l'hypothèse de Riemann, la conjecture de Poincaré, la conjecture de Hodge [479], la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer [845], l'explication du défaut de masse dans les équations de Yang et Mills ([582] (chapitre VIII) [580] (chapitre 10)), etc. C'est pour comprendre le contexte de ces sujets que notre approche a été développée, avec l'idée de faire un lien avec les méthodes de l'analyse spectrale. Les relations avec des espaces de Hilbert et des C*-algèbres d'opérateurs a été creusé même si on reste loin du compte pour ce qui concerne

la présentation de l'appareillage mathématique nécessaire [841] [847] [813]. La dimension 2 a été privilégiée parce que l'on a travaillé essentiellement sur les surfaces de Riemann. Or elle présente des différences qualitatives très importantes par rapport aux dimensions supérieures où l'on a vu que l'on pouvait aussi généraliser la théorie de Markoff. Par exemple le lien donné par le théorème de Dehn-Nielsen entre homéomorphisme et transformation conforme n'est plus si direct dans les dimensions supérieures à 2.

Au terme de ces réflexions, ce qui paraît à l'auteur le plus fascinant est le lien avec la nature du calcul [259] [56] [743] [613] et la théorie algorithmique de l'information. L'idée qui se développe aujourd'hui est que les calculateurs ont un modèle mécanique quantique et que ce dernier est le développement naturel du calcul classique, de la même façon que la mécanique quantique succède à la mécanique classique. Comme si l'analogie chère à Weil, qui a été citée à plusieurs reprises [834] [200], débouchait sur une interaction beaucoup plus profonde que l'on pourrait désigner par le vocable de quantification de la logique, d'ailleurs entrevue par John von Neumann [73] et bien décrite dans [830]. Il reste largement à formaliser cette analogie que Rolf Berndt résume dans son panorama des travaux de E. Kähler par les correspondances suivantes [64]

anneau \rightarrow objet, homomorphisme \rightarrow perception, idéal \rightarrow perspective, corps de Galois \rightarrow oscillateur.

La dernière correspondance avec les oscillateurs peut surprendre, mais elle a été entrevue dans ce qui précède et est clairement apparente dans différents travaux tels que [76] [746] [655] [79] [668] [660] [566]. Elle permet d'envisager une interprétation quantique de l'arithmétique, le nombre 1 étant représentable comme un oscillateur de fréquence ν , le nombre 2 correspondant à un oscillateur de fréquence 2ν , et ainsi de suite... On pourrait ainsi comparer la relation d'incertitude de Heisenberg au résultat bien connu d'indécidabilité de Gödel, et imaginer que les arbres constituent un moyen privilégié de concentration de l'information qui n'est pas indépendant de ces questions. Le dixième problème de Hilbert pourrait lui-même induire une explication comparable [529] (ch.3-4).

L'analogie de Weil pourrait quant à elle déboucher sur une compréhension plus profonde du codage quantique de l'information [56] [57] [743] [195] [656] [595]. Dans le domaine du calcul algorithmique, la quantification est en effet désormais à l'oeuvre [259], comme sont à l'oeuvre les solitons dans la transmission à distance de l'information et le traitement optique dans certains équipements expérimentaux qui seront utilisés dans l'Internet du futur. Dans le domaine de la représentation, les surfaces de Riemann interviennent dans la théorie de la vision des objets [760] [702] et de processus non linéaires [634] (p. 304). La caractéristique d'Euler-Poincaré et les anneaux de Grothendieck apparaissent dans les structures algébriques les plus générales et les ensembles définissables [447], laissant imaginer la possibilité d'associer fonctoriellement à chaque objet ainsi structuré une surface de Riemann. Les limites techniques ressemblent à celles, plus fondamentales, qui viennent d'être

évoquées [488] et qui ont une résonance dans l'impossibilité de prévoir le mouvement de certains systèmes mécaniques [560] [613] (p.202). Faut-il interpréter l'incertitude de Heisenberg comme une limite algorithmique imposée par les moyens logico-mathématiques que nous utilisons pour penser la physique? En tout cas le calcul intégral lui-même a des limites qui ont une importance dans ces questions de calculabilité et impactent les résultats de la mécanique même [529] (p. 193), sachant qu'il est concevable sans dépense d'énergie et sans accroissement d'entropie physique [195] (p. 27). Il y a là tout une perspective globale de réflexions concernant la nature informationnelle et vivante de la mathématique que l'auteur voudrait approfondir en examinant de plus près l'intuition que mathématique et théorie de l'information sont une seule et même chose.

On conclut sur une pensée d'Alexandre Grothendieck qui est exprimée dans son Esquisse d'un Programme. Elle résume à elle seule la façon dont l'auteur du présent texte conçoit sa propre démarche de recherche :

"...la démarche de la pensée qui sonde et qui découvre, en tatônnant dans la pénombre bien souvent, avec des trouées de lumière subite quand quelque tenace image fausse, ou simplement inadéquate, se trouve enfin débusquée et mise à jour, et que les choses qui paraissaient de guingois se mettent en place, dans l'harmonie mutuelle qui leur est propre."

Metz, février 2003.

Bibliographie

- [1] W. Abikoff, The uniformization theorem, Amer. Math. Monthly, October 1981, pp. 574-592
- [2] W. Abikoff, The real analytic theory of Teichmüller space, Lecture Notes in Mathematics $n^{\circ}820$, Springer Verlag, 1989
- [3] R. Adler, L. Flatto, Geodesics flows, interval maps, and symbolic dynamics, Bull. Amer. Math. Soc. 25, 1991, pp. 229-234
- [4] R. Adler, Symbolic dynamics and Markov partitions, Bull. Amer. Math. Soc. 35, n°1, 1998, pp. 1-56
- [5] L. Ahlfors, The complex analytic structure of the space of closed Riemann surfaces, Lecture Notes in Mathematics n°820, Springer Verlag, 1989
- [6] L. Ahlfors, Some remarks on Teichmüller's space of Riemann surfaces, Ann. of Math. 2 $n^{\circ}74$, 1961, pp. 171-191
- [7] A. I. Akhieser, The unity of physical theory and its mathematical formalism, Ukrainian Mathematical Journal, vol. 49 n°12, 1997, pp. 1791-1797
- [8] N. I. Akhieser, Elements of the theory of elliptic functions, Translations of mathematical monographs vol. 79, A.M.S., 1990
- [9] J. L. Alperin, A Lie approach to finite groups, Groups Canberra 1989, Lecture Notes in Math. 1456, Springer Verlag, 1990, pp. 1-9
- [10] LL. Alsedà, D. Juher, M. P. Mumbrú, A note on the periodic orbits and topological entropy of graphs maps, Proc. Amer. Math. Soc. vol. 129 n°10, pp. 2911-2946
- [11] H. Alzer, On Segre's theorem on asymmetric diophantine approximation, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 67, 1997, pp. 195-203
- [12] M. H. Amsler, Des surfaces à courbure négative constante dans l'espace à trois dimensions et leurs singularités, Math. Ann. 130, 1955, pp. 234-254
- [13] A. A. Andronov, S. E. Chaikin, A. A. Vitt, Theory of oscillators, Pergamon Press, 1966
- [14] D. V. Anosov, Geodesic flows on a compact Riemann manifold of negative curvature, Proc. Sketlov Math. Inst. 90, 1967
- [15] B. N. Apanasov, Conformal geometry of discrete groups and manifolds, De Gruyter expositions in mathematics n°32, W. de Gruyter, 2000
- [16] B. N. Apanasov, Discrete groups in space and uniformization problems, Math. and Appl. 40, Kluwer Academic Publishers, 1991
- [17] T. M. Apostol, Modular functions and Dirichlet series in number theory, Graduate texts in math. $\rm n^{\circ}41,\,1976$
- [18] T. M. Apostol, Introduction to analytic number theory, Undergraduate texts in math., 1984
- [19] P. Appel, E. Goursat, Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales (tomes I et II), Gauthier Villars, 1929
- [20] D. Arlettaz, Algebraic K-theory of rings from a topological viewpoint, www.unil.ch/ima/ docs/Personnes/darlettaz.html
- [21] F. M. Arscott, Periodic differential equations, An introduction to Mathieu, Lamé, and allied functions, Pergamon Press, 1964
- [22] V. Armitage, A. Rogers, Gauss sums and quantum mechanics, J. Phys. A: Math. Gen. 33 ou arXiv:quant-ph/0003107 v1, 2000

- [23] J. M. Arnaudiès, J. Bertin, Surfaces de Riemann, équation de Halphen et groupes polyédraux, Ellipses, 2001
- [24] J. M. Arnaudiès, Séries entières, séries de Puiseux, séries de Fourier, Ellipse, 1999
- [25] V. I. Arnold, Equations différentielles ordinaires, Editions de Moscou, 1974
- [26] V. I. Arnold, Les méthodes mathématiques de la mécanique classique, Editions MIR, 1976
- [27] V. I. Arnold, Small denominators I, Trans. Amer. Math. Soc. Ser. 2, n°46, 1965, pp. 213-284; II, Russian Math. Surveys 18-6, 1963, pp. 9-36; III, idem, pp. 85-193
- [28] V. I. Arnold, Catastrophe theory, Springer Verlag, 1984
- [29] V. I. Arnold, Singularités des applications différentiables (2 tomes), Editions MIR, 1986
- [30] V. I. Arnold, Contact geometry, the geometric method of Gibbs thermodynamics, Gibbs lectures, 1989
- [31] V. I. Arnold, V. V. Goryunov, O. V. Lyashko, V. A. Vasil'ev, Singularity theory (I et II), Springer Verlag, 1998
- [32] P. Arnoux, Le codage du flot géodésique sur la surface modulaire, L'Enseignement Mathématique, t. 40, 1994, pp. 29-48
- [33] E. F. Assmus, J. D. Key, Designs and their codes, Cambridge Tracts in Mathematics n°103, Cambridge University Press, 1992
- [34] M. Audin, Les systèmes hamiltoniens et leur intégrabilité, S.M.F. et E.D.P. Science, 2001
- [35] M. Audin, Intégrabilité et non-intégrabilité des systèmes hamiltoniens (d'après S. Ziglin, LJ. Morales-Ruiz, J. P. Ramis, Séminaire Bourbaki, 53ème année, 2000-2001, n°884, mars 2001
- [36] C. Audouin, B. Guinot, Les fondements de la mesure du temps, Masson, 1998
- [37] B. W. Augenstein, Links between physics and set theory, Chaos, Solitons & Fractals vol. 7 n°11, 1996, pp. 1761-1798
- [38] J. C. Baez, baez@galaxy.ucr.edu (pour ADE : http://math.ucr.edu/home/baez/ADE.html)
- [39] J. C. Baez, J. Dolan, From finite sets to Feynman diagrams, Mathematics unlimited 2001 and beyond, Björn Engquist and Wilfried Schmid, 2001
- [40] C. L. Bajaj, R. L. Holt, A. N. Netravali, Rational parametrizations of non singular real cubic surfaces, 1998, http://citeseer.nj.nec.com/bajaj98rational.html
- [41] A. Baker, Matrix groups, An introduction to Lie group theory, Springer, 2001
- [42] V. Baladi, Comment compter avec les fonctions zêta?, Gazette des Mathématiciens n°47, 1991, pp. 79-96
- [43] A. Baragar, Integral solutions of Markoff-Hurwitz equations, Journal of Number Theory 49, 1994, pp. 27-44
- [44] J. Barwise, J. Seligman, Information flow, the logic of distributed systems, Cambridge tracts in theoretical computer science n°44, 1997
- [45] H. Bass, Algebraic K- theory, W. A. Benjamin, 1968
- [46] H. Bateman, Higher transcendental functions, Mc Graw Hill, 1955
- [47] A. F. Beardon, The geometry of discrete groups, Graduate Texts in Mathematics 91, Springer Verlag, 1983
- [48] A. Beauville, Counting rational curves on K_3 -surfaces, www.dma.ens.fr/edition/Publications/all.1998.html
- [49] T. Bedford, M. Keane, C. Series, Ergodic theory, symbolic dynamics and hyperbolic spaces, Oxford University Press, 1991
- [50] A. Beilinson, V. Drinfeld, Chiral algebras, University of Chicago, 2001
- [51] A. Beilinson, V. A. Ginsburg, V. V. Schechtman, Koszul duality, Journal of Geometry and Physics, vol 5, n°3, 1988, reedition in "Geometry and Physics", Essays in honour of I. M. Gelfand, North-Holland, 1991, pp. 317-350
- [52] J. Bellissard, The non commutative geometry of aperiodic solids, Proceedings of the 2001 Summer School of Theoretical Physics, "Geometry, Topology, and Quantum Field Theory", Villa de Leyva, Columbia, 7-30 July 2001, Kluwer,

- [53] E. D. Belokolos, A. I. Bobenko, V. Z. Enol'skii, A.R. Its, V. B. Matveev, Algebro-geometric approach to non linear integrable equations, Springer Verlag, 1994
- [54] G. V. Belyi, On Galois extensions of a maximal cyclotomic field, Math USSR Izv. 14, 1980, pp. 247-256
- [55] R. L. Benedetto, W. M. Goldman, The topology of the relative character varieties of quadruply punctured sphere, Experimental Mathematics 8:1, 1999, pp. 85-103
- [56] P. Benioff, Quantum mechanics and hamiltonian models of computers, Annals of the New York Academy od Sciences vol. 480, 1986, pp. 475-486
- [57] P. Benioff, The computer as a physical system: a microscopic model of computers as represented by Turing machines, Journal of Statistical Physics vol. 22, 1980, p. 563-591
- [58] D. J. Benson, Representations and cohomology, 2 tomes, Cambridge studies in advanced mathematics 30-31, Cambridge University Press, 1991
- [59] M. Benson, Analytic equivalence of isolated hypersurfaces singularities definied by homogeneous polynomials, Proc. Symp. Pure Math. vol. 40, A.M.S., 1983
- [60] M. C. Berg, The Fourier-analytic proof of the quadratic reciprocity, John Wiley & Sons, 2000
- [61] M. Berger, Géométrie (2 tomes), Nathan, 1990
- [62] M. Berger, B. Gostiaux, Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces, PUF, 1987
- [63] G. M. Bergman, Everybody knows what a Hopf algebra is, Contemporary Mathematics, vol. 43, 1985, pp. 25-48
- [64] R. Berndt, http://www.math.uni-hamburg.de/home/berndt/
- [65] M. Berry, Riemann's zeta function: a model for quantum chaos, Quantum chaos and statistical nuclear physics, Eds T.H. Seligman and H. Nishioka, Springer Lecture Notes in Physics n°263, 1986, pp. 1-17
- [66] L. Bers, F. P. Gardiner, Fricke spaces, Advances in Maths. n°62, 1986, pp. 249-284
- [67] L. Bers, L. Ehrenpreis, Holomorphic convexity of Teichmüller's pace, Bull. Amer. Math. Soc. n°70, 1964, pp. 761-764
- [68] D. Bertrand, Groupes algébriques linéaires et théorie de Galois différentielle, Cours de 3ème cycle, Université Paris VI, Premier semestre 1985-1986, notes de cours par René Lardon
- [69] F. R. Beyl, G. Rosenberger, Efficient presentations of $GL(2,\mathbb{Z})$ and $PGL(2,\mathbb{Z})$, London Mathematical Society, LNS 121, Proceedings of Groups-St Andrews 1985, E. Robertson et C. Campbell eds., 1987, pp. 135-137
- [70] F. Bien, Constructions of telephone networks by Galois representations, Notices of the American Mathematical Society, vol. 36, n°1, 1989, pp. 5-22
- [71] P. Billingsley, Ergodic theory and information, John Wiley, 1965
- [72] E. Binz, W. Schempp, Quantum hologram and relativistic hodogram: Magnetic resonance tomography and gravitational wavelet detection, Casys 2000 (D. Dubois ed.), AIP conference proceedings n°573, 2001, pp. 98-131
- [73] G. Birkhoff, J.von Neumann, The logic of quantum mechanics, Annals of mathematics, 37, 1936, pp. 823-843
- [74] J.S. Birman, Braids, links and mapping class groups, Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press, 1975
- [75] J. M. Bismut, J. V. Cheeger, Transgressed Euler classes of $SL(n,\mathbb{Z})$ vector bundles, adiabatic limits of éta invariants and special values of L-functions, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 4ème série, t.25, 1992, pp. 335-391
- [76] J. M. Bismut, Koskul complexes, harmonic oscillators, and the Todd class, J. Amer. Math. Soc. 3(1), 1990, pp. 159-256
- [77] A. Blanchard, Les corps non commutatifs, P.U.F., 1972
- [78] E. Bombieri, Problems of the millenium: the Riemann hypothesis, www.claymath.org
- [79] A. Borel, Automorphic forms on $SL_2(\mathbb{R})$, Cambridge tracts in mathematics 130, Cambridge University Press, 1997

- [80] Z. I. Borevitch, I.R. Chafarevitch, Théorie des nombres, Gauthiers Villars, 1967
- [81] L. A. Borisov, P. E. Gunnells, Toric varieties and modular forms, Invent. Math. 144, 2001, pp. 297-325
- [82] J. M. Borwein, P. B. Borwein, Pi and the AGM, John Wiley and sons, 1986
- [83] R. Bott, On some recent interactions between mathematics and physics, Canad. Math. Bull. vol.28(2), 1985, pp. 129-164
- [84] G. Bouligand, Cours de géométrie analytique, Vuibert, 1946
- [85] N. Bourbaki, Algèbre, Hermann, 1970
- [86] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, chapitres 4, 5 et 6, Hermann, 1968
- [87] B. Bowditch, Markoff triples and the quasifuchsian groups, Proc. London Math. Soc. vol. 77 part 3, 1998, pp. 697-736
- [88] R. Bowen, The equidistribution of closed geodesics, Amer. J. Math. vol. 94, 1972, pp. 413-423
- [89] G. E. Bredon, Topology and geometry, Graduate Texts in Math., Springer Verlag, 1991
- [90] E. Brieskorn, H. Knörrer, Plane algebraic curves, Birkhaüser, 1986
- [91] J. Briggs, F. D. Peat, Un miroir turbulent : guide illustré de la théorie du chaos, InterEditions, 1991
- [92] M. Brion, Points entiers dans les polytopes convexes, Séminaire Bourbaki n° 780, 1993-1994, Astérisque 227, 1995, pp. 145-169
- [93] A. Broise, F. Dal'bo, M. Peigné, Etudes spectrales d'opérateurs de transfert et applications, Astérisque, 1996, p. 112-177
- [94] R. Brooks, H. M. Farkas, I. Kra, Number theory, theta identities, and modular curves, Contemporary Mathematics vol. 201, 1997, pp. 125-154
- [95] M. Broué, Codes et formes quadratiques, Séminaire P. Dubreil, $28^{\grave{e}me}$ année, 1974-1975, n°23, pp. 01 à 03
- [96] M. Broué, M. Enguehard, Polynômes de poids de certains codes et fonction théta de certains réseaux, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 4ème t. 5, 1972, pp. 157-181
- [97] R. W. Bruggeman, On the distribution of Dedekind sums, Comtemporary Mathematics, Vol 166, 1994, pp. 197-210
- [98] R. W. Bruggeman, Families of automorphic forms, Birkhaüser, 1994
- [99] G. W. Brumfiel, H. M. Hilden, SL(2) representations of finitely presented groups, Contemporary Mathematics n° 1987, chapter 10, 1995
- [100] J. L. Brylinski, Loop spaces, characteristic classes and geometric quantization, Progress in mathematics vol 107, Birkhaüser, 1993
- [101] J. L. Brylinski, Central extensions and reciprocity laws, Cahier de topologie et géométrie différentielle catégorique, volume XXXVIII-3, 1997, pp. 193-215
- [102] J. L. Brylinski, Koszul complexes, differential operators, and the Weil-Tate reciprocity law, Journal of algebra n $^\circ$ 230, 2000, pp. 89-100
- [103] D. A. Buell, Binary quadratics forms: classical theory and modern computations, Springer Verlag, 1989
- [104] D. Bump, Automorphic forms and representations, Cambridge series in advanced mathematics 55, Cambridge University Press, 1996
- [105] A. Buium, Differential algebra and diophantine geometry, Hermann, 1994
- [106] U. Bunke, M. Olbrich, Selberg zeta and theta a differential operator approach, Mathematical Research vol 83, Akademie Verlag, 1995
- [107] U. Bunke, The η -invariant as a lagrangian of a topological quantum field, talk given at Wendisch Reitz near Berlin, September 1993, http://www.uni-math.gwdg.de/bunke/linkstopapers.html
- [108] J. O. Button, The uniqueness of the prime Markoff numbers, J. London Math. Soc. (2), n°58, 1998, pp. 9-17

- [109] J. O. Button, Markoff numbers, principal ideals and continued fraction expansions, J. Number Theory, vol 87, n°81, march 2001
- [110] R. N. Cahn, http://www.physics.lbt.gov/~.rncahn/book.html
- [111] J. Calais, Eléments de théorie des groupes, P.U.F, 2ème édition 1996
- [112] A. Cannas da Silva, Lectures on symplectic geometry, Lecture Notes in Mathematics $n^{\circ}1764$, Springer Verlag, 2001
- [113] A. Carbone, M. Gromov, Mathematical slices of molecular biology, IHES/M/01/03, janvier 2001, Gazette des Mathématiciens, supplément au numéro 88, S.M.F., 2001
- [114] A. Carbone, M. Gromov, P. Pruzinkiewicz, Pattern formation in biology, vision and dynamics, World ScientificPublishing Co, 2000
- [115] J. R. Carson, Electric circuit theory and the operational calculus, New york, 1926
- [116] H. Cartan, Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes, Hermann, 1961
- [117] J. S. Carter, How surfaces intersect in space (2ed.), Series on knots and everything vol. 2, World Scientific, 1995
- [118] P. Cartier, C. De Witt-Morette, Intégration fonctionnelle, éléments d'axiomatique, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 316, Série II, 1993, pp. 733-738
- [119] P. Cartier, Développements récents sur les groupes de tresses, applications à la topologie et à l'algèbre, Séminaire Bourbaki, 42ème année n°716, 1989-90, pp. 1-42
- [120] P. Cartier, Des nombres premiers à la géométrie algébrique, une brève histoire de la fonction zéta, Séminaire d'histoire des mathématiques de l'Institut Poincaré, 23 janvier 1991
- [121] L. Casetti, M. Pettini, E. D. G. Cohen, Geometric approach to hamiltonian dynamics ans statistical mechanics, arXiv:cond-mat/9912092v1, 6 décembre 1999
- [122] A. Cassa, Quantum physical systems as classical systems, Journal of Mathematical Physics, vol. 42, n°11, Nov. 2001, pp. 5143-52149
- [123] J. W. S. Cassels, An introduction to diophantine approximation, Cambridge Tracts in Math. Physics, $n^{\circ}45$, Cambridge University Press, 1957
- [124] J. W. S. Cassels, An introduction to the geometry on numbers, Springer Verlag, 1971
- [125]~ J. L. Cathelineau, Homologie du groupe linéaire et polylogarithmes, Séminaire Bourbaki n°772, 1993, pp. 01-23
- [126] L. S. Charlap, Bieberbach groups and flats manifolds, Springer Verlag, 1986
- [127] G. J. Chaitin, Toward a mathematical definition of life, in The maximal entropy formalism (ed. R. D. Levine, M. Tribus), MIT Press, 1979, pp. 477-498
- [128] G. J. Chaitin, Algorithmic information theory, Cambridge University Press, 1987
- [129] K. Chandrasekharan, Elliptic functions, Springer Verlag, 1985
- [130] V. Chari, A. N. Pressley, A guide to quantum groups, Cambridge University Press, 1994
- [131] R. Charney, M. Davis, When is a Coxeter system determined by its Coxeter group?, J. London Math. Soc. (2)61, 2000, pp. 441-461
- [132] E. Charpentier, N. Nikolski, Leçons de mathématiques d'aujourd'hui, Cassini, 2000
- [133] S. Chase, M. Sweedler, Hopf algebras and Galois theory, Springer Verlag, 1969
- [134] T. M. Cherry, Analytic quasi-periodic curves of discontinuous type on a torus, Proceedings of the London Math. Soc., Serie 2 vol 44 n $^\circ$ 2210, 1938, pp. 175-215
- [135] C. Chevalley, Introduction to the theory of algebraic functions of one variable, Math. surveys, A.M.S., 1951
- [136] S. Chowla, The Riemann hypothesis and Hilbert's tenth problem, Blackie & son Ltd, 1965
- [137] D. V. Chudnovski, G. V. Chudnovski, Computational problems in arithmetic of linear differential equations, some diophantine applications, Number theory New York 1985-1988, (D.V. et G.V. Chudnovski, M. B. Natanson, H. Cohn editors) Lecture Notes in Mathematics 1383, Springer Verlag, 1989
- [138] R. C. Churchill, Two-generator subgroups of $SL(2,\mathbb{C})$ and the hypergeometric, Riemann and Lamé equations, J. Symbolic Comput. 28 (4-5), 1999, pp. 521-545

- [139] D. E. Cohen, Combinatorial group theory, a topological approach, J. London Math. Soc. Student Texts n°14, Cambridge University Press, 1989
- [140] H. Cohen, A course in computational algebraic number theory, Springer-Verlag, 1991
- [141] M. Cohen, W. Metzler, A. Zimmermann, What does a basis of F(a, b) look like?, Math. Ann. $n^{\circ}257$, 1981, pp. 435-445
- [142] P. Cohen, Sur la mécanique statistique d'après les travaux de Bost-Connes, Journées académiques de Lille, 9-10 mars 1998
- [143] H. Cohn, Approach to Markoff minimal forms through modular functions, Ann. of Math., vol 61, n°61, 1955, pp. 1-12
- [144] H. Cohn, Representation of Markoff's binary quadratic forms by geodesics on a perforated torus, Acta Arithmetica XVIII, 1971, pp. 123-136
- [145] H. Cohn, Markoff forms and primitive words, Math. Ann. n°196, 1972, pp. 8-22
- [146] H. Cohn, Minimal geodesics on Fricke's torus covering, Riemann surfaces and related topics, Proceedings of the 1978 Stony Brooks Conference, Princeton University Press, 1980
- [147] H. Cohn, Remarks on the cyclotomic Fricke groups, Kleinian groups and related topics, Proceedings Oaxtepec 1981, Lectures Notes in Mathematics n°971, Springer Verlag, 1982
- [148] H. Cohn, Markoff geodesics in matrix theory, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, n°147, Marcel Dekker, 1992, pp. 69-92
- [149] H. Cohn, Conformal mapping on Riemann surfaces, Dover, 1980
- [150] H. Cohn, Introduction to the construction of class fields, Cambridge Studies in Advanced Mathematics n°6, Cambridge University Press, 1985
- [151] H. Cohn, Minimality bounds for traces of Markoff matrices, Canadian Mathematical Society Conference Proceedings, vol. 15, 1995, pp. 109-121
- [152] H. Cohn, Some direct limits of primitive homotopy words and of Markoff geodesics, Annals of Mathematics Studies n°79, 1974, pp. 81-98
- [153] Y. Colin de Verdière, Un exemple de chaos classique et quantique : les surfaces de Riemann, chapitre 2 de Turbulence et déterminisme (publié sous la direction M. Lesieur), PUG, 1998
- [154] J. F. Colombeau, Multiplication of distributions, Bull. Amer. Math. Soc. 23 n°2, 1990, pp. 251-268
- [155] J. L. Colliot Thélène, Les grands thèmes de François Châtelet, L'Enseignement Mathématique, $2^{\grave{e}me}$ série, 1988, pp. 387-405
- [156] J. L. Colliot Thélène, L'arithmétique des variétés rationnelles, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 1992, pp. 295-335
- [157] I. Connell, Elliptic curves handbook, McGill University, Montreal, 1996
- [158] A. Connes, Géométrie non commutative, InterEditions, Paris, 1990, version étendue : Non commutative geometry, Academic Press, 1994
- [159] A. Connes, Brisures de symétrie spontanée et géométrie du point de vue spectral, Séminaire Bourbaki n°816, 1995-1996, pp. 1-37
- [160] A. Connes, Trace formula in non commutative geometry and the zeros of the Riemann zeta function, http://www.esi.ac.at, 8 March, 1999, Sel. Math. New Ser. 5, 1999, pp. 29-106
- $[161]\quad A.\ Connes,\ Non\ commutative\ geometry,\ year\ 2000,\ arXiv\ :math.QA/0011193\ 23/11/2000$
- [162] A. Connes, Indice des sous facteurs, algèbres de Hecke et théorie des noeuds, Séminaire Bourbaki n°647, 1984-1985, pp. 1-20
- [163] J. B. Bost, A. Connes, Hecke algebras, type III factors and phase transitions with spontaneous symmetry breaking in number theory, Sel. Math., vol.1 n°3, 1995, pp. 411-457
- [164] A. Connes, Explicit formulas as trace formulas, quantized calculus, and spectral interpretation of the zeros of the Riemann zeta function, www.mpim-bonn.mpg.de/html/services/activities/ dt99/MPI-1999650-d.ps
- [165] J. H. Conway, The sensual (quadratic) form, The Carus Monograph (M.A.A.) n°26, 1997
- [166] J. H. Conway, An enumeration of knots and links and some of their algebraic properties, Computational problems in abstract algebra (D. Welsh ed.), Pergamon Press, 1970, pp. 329-358

- [167] J. H. Conway, N. J. A Sloane, Sphere packings, lattices and groups, Springer Verlag, 1993
- [168] J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker, R. A. Wilson, Atlas of finite groups, Clarendon Press, 1985
- [169] G. Cornell, J. H. Silverman, Arithmetic geometry, Springer Verlag, 1986
- [170] S. C. Couthino, A primer of algebraic D-modules, London Mathematical Society Student Texts 33, Cambridge University Press, Cambridge, 1995
- [171] D. A. Cox, Primes of the form $x^2 + ny^2$, Fermat, Class field theory, and complex multiplication, John Wiley and sons, 1989
- [172] D. A. Cox, What is a toric variety? http://www.amherst.edu/~dacox/
- [173] D. A. Cox, Recent developments in toric geometry, Algebraic Geometry Santa Cruz 1995 (J. Kollar, R. Lazarsfeld, D. Morrison eds.), Proc. Symp. Pure Math., AMS, 1997, pp. 389-436
- [174] D. A. Cox, Update on toric geometry, http://emis.kaist.ac.kr/journals/SC/2002/6/pdf/smf_sem.cong_6_1.41.pdf
- [175] H. S. M. Coxeter, W. O. J. Moser, Generators and relations for discrete groups, Ergebnisse des Mathematik und ihrer Grenzgebeite, 14, Springer Verlag, 1980
- [176] R. Crandall, C. Pomerance, Prime numbers-a computational perspective, Springer, 2001
- [177] D. J. Crisp and W. Moran, Single self-intersection geodesics and the Markoff spectrum, Number theory with an emphasis on the Markoff spectrum (A.D. Pollington and W. Moran ed.), Lectures Notes in Pure and Applied Mathematics, Dekker, n°147, 1993, pp. 83-93
- [178] R. H. Crowell, R. H. Fox, Introduction to knot theory, Blaisdell Publishing Co, 1963
- [179] R. Cuculière, Représentation diophantienne des nombres de Fibonacci, Bulletin de l'AP-MEP, février 1984
- [180] T. W. Cusick and M.E. Flahive, The Markoff and Lagrange spectra, Mathematical Surveys and Monographs n° 30, A.M.S., 1989
- [181] T. W. Cusick, The connection between the Lagrange and Markoff spectra, Duke Math. Journal, 1975, pp. 507-517
- [182] T. W. Cusick, On Perrine's generalized Markoff equation, Aequationes Mathematicae n° 3, 1993, pp. 203-211
- [183] T. W. Cusick, C. Ding, A. Renwall, Stream ciphers and number theory, North Holland Mathematical Library 55, 1998
- [184] S. D. Cutkosky, H. Srinivasan, The algebraic fundamental group of a curve singularity, Journal of Algebra 230, 2000, pp. 101-126
- [185] P. Cvitanovic, Classical and quantum chaos: a cyclist treatise, 1998, http://www.nbi.dk/ ChaosBook/
- [186] D'Arcy W. Thompson, Formes et croissance, traduction par D. Teyssié, Seuil, 1994
- [187] A. Dahan Dalmedico, J. L. Chabert, K. Chemla, Chaos et déterminisme, Seuil, 1992
- [188] V. I. Danilov, The geometry of toric varieties, Russian Math. Surveys 33:2, 1978, pp. 97-154
- [189] A. Das, Integrable models, Lecture Notes in Physics n°30, World Scientific, 1989
- [190] P. Davies, La nouvelle physique, Flammarion, 1993
- [191] M. Davis, Computability and unsolvability, reedition Dover, 1982
- [192] M. Dehn, Papers on group theory and topology, Springer Verlag, 1987
- [193] J. P. Delahaye, Information noyée, information cachée, Pour la Science n°229, Novembre 1996, pp. 142-146
- [194] J. P. Delahaye, Information complexité et hasard, Hermès, 1999
- [195] J. P. Delahaye, L'intelligence et le calcul (de Gödel aux ordinateurs quantiques), Belin/Pour la Science, 2002
- [196] R. Dedekind, Gesammelte Math. Werke 1, Vieweg, 1930-1932, pp. 174-201
- [197] P. Deligne, La conjecture de Weil, (I) Pub. Math. IHES 43, 1974, pp. 273-308, (II) Pub. Math. IHES 52, 1980, pp. 137-252

- [198] M. Demazure, Identités de MacDonald, Séminaire Bourbaki n° 483, 1975-1976, pp. 1-11
- [199] E. E. Demidov, Some aspects of the theory of quantum groups, Russian Math. Surveys 48:6, 1993, pp. 41-79
- [200] C. Deninger, Some analogies between number theory and dynamical systems on foliated spaces, Documenta mathematica, Extra volume ICM, 1998, pp. 163-186
- [201] G. De Rham, Sur les polygones générateurs des groupes fuchsiens, Enseignement Mathématique 17, 1971, pp. 49-61
- [202] J. L. Dessalles, L'ordinateur génétique, Hermès, 1996
- [203] D. Deutsch, A. Ekert, R. Lupacchini, Machine, logic and quantum physics, The Bulletin of Symbolic Logic, vol. 6 n°3, 2000, pp. 265-283
- [204] D. Deutsch, Is there a fundamental bound on the rate at which information can be processed? Phys. Rev. Letter 42, 1982, pp. 286-288
- [205] D. Deutsch, Quantum theory, the Church-Turing principle and the universal quantum computer, Proc. Roy. Soc. Lond. Ser. A, col 400, 1985, pp. 96-117
- [206] D. W. Sumners, Lifting the curtain: using topology to prob the hidden action of enzymes, Notices Amer. Math. Soc. 528, 1995, pp. 5-42
- [207] R. Diaz, S. Robins, The Ehrhart polynomial of a lattice polytope, Annals of Mathematics 145, 1997, pp. 503-518
- [208] W. Dicks, M. J. Dunwoody, Groups acting on graphs, Cambridge Studies in Advanced Mathematics n°17, Cambridge University Press, 1989
- [209] L. E. Dickson, History of the theory of numbers, Chelsea reprints, New York, 1992
- [210] T. Tom Dieck, Transformation groups, Walter de Gruyter, 1987
- [211] B. Dietz, On the gaps of the Lagrange spectrum, Acta Arithmetica. 45, 1985, pp. 59-64
- [212] J. Dieudonné, Panorama des mathématiques pures le choix bourbachique, Gauthier Villars, 1977
- [213] J. Dieudonné, Pour l'honneur de l'esprit humain les mathématiques d'aujourd'hui, Hachette Pluriel, 1987
- [214] J. Dieudonné, Abrégé d'histoire des mathématiques, Tome I et II, Hermann, 1978
- [215] J. Dieudonné, Calcul infinitésimal, Hermann, 1980
- [216] A. Dimca, Singularities and topology of hypersurfaces, Springer Verlag, 1992
- [217] P. G. L. Dirichlet, Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données, J. Reine Angew. Math. n°4, 1829, pp. 157-169
- [218] P. G. L. Dirichlet, Lectures on number theory, History of mathematics sources vol. 16, A.M.S.-L.M.S., 1990
- [219] J. Dixmier, Quelques aspects de la théorie des invariants, Conférences faites à l'Université of Pennsylvanie, 1987, La Gazette des Mathématiciens n°43, Janv. 1990, pp. 39-64
- [220] M. P. Do Carmo, Riemannian geometry, Birkhäuser, 1992
- [221] M. M. Dodson, Exceptional sets in dynamical systems and diophantine approximation, Preprint, mmq1/at/york.ac.uk
- [222] M. M. Dodson, J. A. G. Vickers editors, Number theory and dynamical systems, London Mathematical Society Lecture Notes Series 134, Cambridge University Press, 1989
- [223] C. T. J. Dodson, Categories, bundles ans space-time topology, Kluwer, 1988
- [224] I. Dolgachev, Lectures on modular forms, Fall 1997/98, ftp.math.lsa.unich.edu (sur la même adresse et du même auteur : Introduction to physics, Introduction to algebraic geometry, Introduction to string theory.)
- [225] I. Dolgachev, Integral quadratic forms: application to algebraic geometry (after V. Nikulin), Séminaire Bourbaki n°611, 1982-1983, pp.1-33
- [226] R. et A. Douady, Algèbres et théories galoisiennes, Cedic/Nathan, 1979
- [227] B. Doubrovine, S. Novikov, A. Fomenko, Géométrie contemporaine méthodes et applications, 3 tomes, Mir, 1979

- [228] P. Dräxler, G. O. Michler, C. M. Ringel, Computational methods for representations of groups and algebras, Progress in mathematics, vol. 173, Birkaüser, 1999
- [229] J-M. Drezet, J. Le Potier, Fibrés stables et fibrés exceptionnels sur P^2 , Ann. Sci. Ecole Normale Sup. (4) n°18, 1985, pp. 193-243
- [230] J-M. Drezet, Sur les équations vérifiées par les invariants des fibrés exceptionnels, Forum Math. 8, 1196, pp. 237-265, http://www.math.jussieu.fr/~drezet/CV/CV.html
- [231] J-M. Drezet, Fibrés exceptionnels et suite spectrale de Beilinson sur $P_2(\mathbb{C})$, Math. Ann. 275, 1986, pp. 25-48
- [232] B. Dubrovin, I. Krichever, S. Novikov, Schrödinger equations in magnetic fields and Riemann surfaces, Sov. Math. Dokl. 17, 1976, pp. 947-951
- [233] P. Du Val, Elliptic functions and elliptic curves, London Mathematical Society Lecture Note Series 9, Cambridge University Press, 1993
- [234] F. Dyson, Missed opportunities, Bull. Amer. Math. Soc. vol.78 n°5, 1972, pp. 635-652
- [235] C. J. Earle, Teichmüller spaces as complex manifolds, Conference at Warwick, 1992
- [236] W. Ebeling, Lattices and codes, a course partially based on lectures by F. Hirzebruch, Advanced Lectures in Mathematics, Vieweg, 1994
- [237] W. Ebeling, Quadratische formen und Monodromie gruppen von Singularitäten, Math. Ann. 232, 1978, pp. 463-498
- [238] B. Candelpergher, J. C. Nosmas, F. Pham, Approche de la résurgence, Hermann, 1993
- [239] H. M. Edwards, Divisor theory, Birkhäuser, 1990
- [240] M. Efimov, Géométrie supérieure, Editions MIR, 1981
- [241] S. Eilenberg, N. Steenrod, Foundations of algebraic topology, Princeton Univ. Press, 1952
- [242] D. Eisenbud, W. Neumann, Three dimensional link theory and invariants of plane curves, Annals of Mathematics Studies 110, Princeton University Press, 1975
- [243] G. Eisenstein, Mathematische Werke (2 tomes), Chelsea, 1975
- [244] M. H. El Khuti, Cubic surfaces of Markov type, Math USSR Sbornik, vol 22, n°3, 1974, pp. 331-346
- [245] J. Elstrodt, F. Grunewald, J. Mennicke, Groups acting on hyperbolic spaces, Springer Verlag, 1998
- [246] N. Ericksson, q-series elliptic curves and odd values of the partition functions, I.J.M.M.S. vol 22 $\rm n^{\circ}1$, 1999, p. 55-65.
- [247] C. Ernst, D. W. Sumners, A calculus for rational tangles application to DNA recombination, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. n°108, 1990, pp. 489-515
- [248] L. Euler, Eléments d'algèbre (tome 2 : Analyse indéterminée), Bachelier, 1807, pp. 323-375
- [249] L. Euler, Opera Omnia 1 II, Teubner et Füssli, 1911, p. 390-398
- [250] L. Euler, Introduction à l'analyse infinitésimale, Barrois, 1796, nouvelle édition ACLéditions, 1987
- [251] L. D. Fadeev, A hamiltonian interpretation of the inverse scattering method, Solitons (R. K. Bullough, P. J. Caudrey ed.), Topics in current physics, Springer Verlag, 1980, pp. 339-354
- [252] A. Faisant, L'équation diophantienne du second degré, Hermann, 1991
- [253] H. M. Farkas, I. Kra, Riemann surfaces, Graduate Texts in Math. 71, Springer Verlag, 1991
- [254] H. M. Farkas, I. Kra, Theta constants, Riemann surfaces and the modular group, Graduate studies in mathematics vol 37, A.M.S., 2001
- [255] A. Fathi, F. Laudenbach, V. Poenaru, Travaux de Thurston sur les surfaces, Astérisque 66-67, 1979
- [256] B. Fedosov, Deformation, quantization and index theory, Akademie Verlag, 1996
- [257] J. Feldman, H. Knörrer, E. Trubowitz, There is no two dimensional analogue of Lamé's equation, Math. Ann. 294, 1992, pp. 295-324
- [258] J. Ferrand, The action of conformal transformations on a Riemann manifold, Math. Ann. Band 304 H2, 1996, pp. 277-292

- [259] R. Feynman, Quantum mechanical computers, Optics News vol.11, 1985, pp. 11-20
- [260] K. H. Fichtner, M. Ohya, Quantum teleportation with entangled states given by beam splittings, Commun. Math. Phys., 2001, pp. 229-247
- [261] Yu. Yu. Finkel'shtein, Klein polygons and reduced regular continued fractions, Russian Math. Surveys , 1993, pp. 198-200
- [262] G. Fischer, Quantization induced by geometry, Differential geometry and applications, Proc. Conf. Aug 28 - Sept 1, Brno 1996, pp. 559-565
- [263] G. Fischer, Mathematische Modelle, Bildband, Braunschweig, Germany, Vieweg, 1986 (cité par http://mathworld.wolfram.com/RationalDoublePoint.html)
- [264] L. R. Ford, Automorphic functions, Chelsea Publishing Company, reprint 1972
- [265] J. L. Dyer, E. Formanek, The automorphism group of a free group is complete, J. London Math. Soc. (2), 11, 1975, pp. 181-190
- [266] G. D. Forney, On the duality of coding and quantizing, DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, Vol 14, A.M.S., 1993, pp. 1-14
- [267] J. Foster, Lectures on Riemann surfaces, Springer Verlag, 1981
- [268] J. Fourier, La théorie analytique de la chaleur, Firmin Didot, Paris, 1822
- [269] J. Frenckel, Géométrie pour l'élève professeur, Hermann, 1973
- [270] R. Fricke, Über die Theorie der automorphen Modulgruppen, Gött. Nach., 1896, pp. 91-101
- [271] D. Friedan, S. Shenker, The analytic geometry of two-dimensional conformal field theory, Nuclear Physics, B281, 1897, pp. 509-545
- [272] R. Friedman, Algebraic surfaces and holomorphic vector bundles, Universitext, Springer Verlag, 1988
- [273] R. Fricke, F. Klein, Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen, Teubner, Leipzig, 1897
- [274] D. Frobenius, Über die Markoffschen Zahlen, Preuss. Akad. Wiss. Sitzungsber., 1913, pp. 458-487
- [275] J. Fuchs, Affine Lie algebras and quantum groups, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, 1995
- [276] S. Fukuhara, Modular forms, generalized Dedekind symbols and period polynomials, Math. Ann. 310, 1998, pp. 83-101
- [277] S. Fukuhara, Genaralized Dedekind symbols associated with the Eisentstein series, Proc. Amer. Math. Soc. vol. 127 $\rm n^{\circ}9$, pp. 2561-2568
- [278] S. Fukuhara, Y. Matsumoto, N. Yui, Non commutative polynomial reciprocity formulae, International Journal of mathematics, vol. 12 n°8, 2001, pp. 973-986
- [279] W. Fulton, Algebraic curves, W. A. Benjamin, 1969
- [280] P. Gabriel, A. V. Roiter, Representations of finite-dimensionnal algebras, Springer Verlag, 1997
- [281] J. M. Borwein, F. G. Garvan, Approximations to π via the Dedekind eta functions, Canad. Math. Soc. Conference Proceedings, vol. 20, Organic mathematics, 1997, pp. 89-114
- [282] C. F. Gauss, Recherches arithmétiques, traduction Poullet Delisle, Courcier, 1807
- [283] C. F. Gauss, Recherches générales sur les surfaces courbes, traduction M. E. Roger, Albert Blanchard, 1967
- [284] K. Gawedski, Conformal field theory, Séminaire Bourbaki, n°704, 1988-1989, pp. 1-32
- [285] M. E. Gbur, On the lower Markov spectrum, Monat. für Math. 81, 1976, pp. 95-107
- [286] S. Gelbart, An elementary introduction to the Langlands' program, Bull. Amer. Math. Soc. vol 10 n°2, 1984, pp. 177-219
- [287] I. M. Gel'fand, M. I. Graev, I. I. Pyatetskii-Shapiro, Representation theory and automorphic forms, Academic Press, 1990
- [288] J. M. Kantor traducteur pour le Bulletin de l'APMEP 1990 de l'article "Comment je suis devenu mathématicien", entretien de I. M. Gelfand avec V. Retah et A. Sossinski publié dans la revue Quant, 1989.

- [289] I. M. Gel'fand, I. N. Bernstein, V.A. Ponomarev, Coxeter functors and Gabriel's theorem, Russ. Math. Surv. 28(2), 1973, pp. 17-32
- [290] I. M. Gelfand, Yu. I. Manin, Homological algebra, Springer Verlag, 1994
- [291] S. Gervais, Presentation and central extensions of mapping class groups, Trans. Amer. Math. Soc. vol. 348, n°8, 1996, pp. 3097-3132
- [292] F. Gesztesy, H. Holden, Hierarchies of soliton equations and their algebro-geometric solutions, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 79, 2003
- [293] J. Gilman, Two-generators discrete subgroups of PSL(2, ℝ), Memoirs of the American Mathematical Society n°561, September 1995
- [294] P. B. Gilkey, Invariance theory, the heat equation and the Atiyah-Singer index theorem, Publish or Perish, 1984, electronic reprint, 1996
- [295] P. B. Gilkey, The geometry of spherical space form groups, World Scientific vol 7, 1989
- [296] C. Godbillon, Eléments de topologie algébrique, Hermann, 1971
- [297] K. Gödel, Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I, 1931, Monatschefte für Mathematik und Physik, vol. 38, 1931, pp. 173-198, traduction dans Le théorème de Gödel, Editions du Seuil, 1989
- [298] J. R. Goldman, Knots, tangles and electrical networks, Advances in Applied Mathematics n°14, 1993, pp. 267-306
- [299] W. M. Goldman, Ergodic theory on moduli spaces, Annals of Math. 146, 1997, pp. 475-507
- [300] V. A. Golubeva, Some problems in the analytic theory of Feynmann integrals, Russian Math. Surveys 31 n°2, 1976, pp. 135-220
- [301] R. E. Gomory, An algorithm for integer solutions to linear programming, Recent advances in Mathematical Programming (Graves and Wolf eds.), Mc Graw Hill, 1963, pp. 269-302
- [302] F. Gonzales Acuna, J. M. Montesinos Amilibia, On the character variety of group representations in $SL(2,\mathbb{C})$ and $PSL(2,\mathbb{C})$, Mth. Z. 214, 1993, pp. 627-652
- [303] V. D. Goppa, Geometry and codes, Kluwer Academic Publishers, 1988
- [304] A. L. Gorodentsev, A. N. Rudakov, Exceptional vector bundles on projective spaces, Duke Mathematical Journal vol. 54 n°1, 1987, pp. 115-130
- [305] A. L. Gorodentsev, Helix theory and nonsymmetrical bilinear forms, Algebraic geometry and its applications, Proceedings of the 8th Algebraic Geometry Conference, Yaroslavl' 1992, publication of the Steklov Institute of Mathematics (A. Tikhomirov, A. Tyurin, editors), Vieweg, 1994
- [306] D. Goss, What is a Shtuka?, Notices of the American Mathematical Society vol. 50, $n^{\circ}1$, January 2003, pp. 36-37
- [307] M. Gotay, J. A. Isenberg, La symplectification de la science, Gazette des mathématiciens n°54, 1992 (voir également l'article de C. Viterbo relatif à la topologie symplectique)
- [308] A. Gramain, Topologie des surfaces, P.U.F., 1971
- [309] Y. Grandati, Eléments d'introduction à l'invariance conforme, Centre de Recherches Nucléaires de Strasbourg, CRN-PHTH/91-13, 1991
- [310] D. Grant, Some product formulas for theta functions in one and two variables, Acta Arithmetica 102.3, 2002, p. 223
- [311] H. Grauert, R. Remmert, Theory of Stein spaces, Grundlehren Math. Wiss. vol. 236, Springer Verlag, 1979
- [312] J. Gray, Linear differential equations and group theory from Riemann to Poincaré, Birkhaüser, 1986
- [313] M. A. Grayson, The heat equation shrinks embedded plane curves to round points, J. Differential geometry 26, 1987, pp; 285-314
- [314] H. B. Griffiths, Surfaces, Cambridge University Press, second edition 1980
- [315] C. Grosche, F. Steiner, Handbook of Feynman path integral, Springer Verlag, 1998
- [316] K. I. Gross, On the evolution of non commutative harmonic analysis, Amer. Math. Monthly 85, 1978, pp. 525-547

- [317] A. Grothendieck, Esquisse d'un programme, Preprint 1985
- [318] A. Grothendieck, Sur la classification des fibrés holomorphes sur la sphère de Riemann, Amer. J. Math 79., 1957, pp. 121-138
- [319] J. Guenot, R. Narasimhan, Introduction à la théorie des surfaces de Riemann, Monographie n°23, L'Enseignement Mathématique, 1976
- [320] A. Guichardet, Leçons sur certaines algèbres topologiques, Dunod, 1967
- [321] A. Guichardet, Groupes quantiques, Interéditions/CNRS, 1995
- [322] R. C. Gunning, Lectures on modular forms, Annals of mathematics studies, Princeton University Press, 1962
- [323] R. C. Gunning, Lectures on Riemann surfaces, Princeton University Press, 1966
- [324] C. H. Gupta, Around automorphisms of relatively free groups, Algebra (some recent advances), I.B.S. Passi Ed., Birkhaüser, 1999, pp. 63-74
- [325] M. C. Gutzwiller, Chaos in classical and quantum mechanics, IAM 1, Springer Verlag, 1990
- [326] M. C. Gutzwiller, The origin of the trace formula, Classical-semi classical and quantum dynamics in atoms (Editors H. Friedrich et B. Eckhardt), Lecture Notes in Physics n°485, Springer Verlag, 1997, pp. 8-28
- [327] H. Haefliger, F. Laudenbach, V. Poenaru, L. Siebenmann, Echos du colloque Jean Cerf, Gazette des mathématiciens n°64, 1995, pp. 3-15
- [328] U. Halbritter, Some new reciprocity formulas for generalized Dedekind sums, Results in Mathematics vol. 8, 1985, pp. 21-46
- [329] R. Hartshorne, Algebraic geometry, Graduate Texts in Math. n°52, Springer Verlag, 1977
- [330] W. J. Harvey, Spaces of discrete groups, discrete groups and automorphic functions, Academic Press, 1977
- [331] A. Haas, Diophantine approximation on hyperbolic Riemann surfaces, Acta Mathematica, 156, 1986, pp. 33-82
- [332] A. Hatcher, Pants decompositions of surfaces, www. math.cornell.edu/~hatcher/
- [333] J. C. Hausmann, Sur l'usage des critères pour reconnaître un groupe libre, un produit amalgamé ou une HNN-extension, L'Enseignement Mathématique n°27, 1981, pp. 221-242
- [334] S. Hawking et autres, La mort de Newton, Maisonneuve et Larose, 1996
- [335] O. Heaviside, On operators in mathematical physics, Proc. Royal Society London, 52, 1893, pp. 504-529 et 54, 1894, pp. 105-143
- [336] E. Hecke, Uber die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch ihre Funktional gleichung, Math. Ann. 112, 1936, pp. 664-699
- [337] Y. Hellegouarch, Invitation aux mathématiques de Fermat-Wiles, Masson, 1997
- [338] A. Henderson, The twenty seven lines upon the cubic surface, Cambridge Univ. Press, 1911
- [339] Ch. Hermite, Troisième lettre à Jacobi, 6 août 1845, Oeuvres, Gauthiers Villars, 1905, pp. 100-121
- [340] J. N. Mather et autres, Michael R. Herman, Gazette des Mathématiciens, Avril 2001, n° 88, pp. 51-94
- [341] H. Hida, Geometric reciprocity laws, www.math.ucla.edu/~hida/285b.1.01s
- [342] C. J. Hightower, The minima of indefinite binary quadratic forms, J. of Number Theory $n^{\circ}2$, 1970, pp. 364-378
- [343] G. Higman, B. H. Neumann, H. Neumann, Embeddings theorems for groups, J. London Math. Soc. 24, 1949, pp. 247-254
- [344] D. Hilbert, Sur les problèmes futurs des mathématiques, Compte rendu du deuxième congrès de mathématiques du 6 au 12 août 1900, Göttinger Nachrichten, 1900, Réimpression J. Gabay, 1990
- [345] D. Hilbert, S. Cohn-Vossen, Geometry and the imagination, Chelsea Pubishing Company, reedition 1990
- [346] D. Hilbert, Les fondements de la géométrie, Edition critique par P. Rossier, Dunod, 1971

- [347] D. Hilbert, P. Bernays, Fondements des mathématiques (2 tomes), L'Harmattan, 2002
- [348] D. Hilbert, Theory of algebraic invariants, Cambridge mathematical library, Cambridge University Press, 1993
- [349] D. Hilbert, Théorie des corps de nombres algébriques, Traduction A. Lévy et Th. Got, Hermann, 1913
- [350] M. Hilsum, L'invariant η pour les variétés lipchitziennes, J. of Diff. Geom. vol. 55 n°1, 2000, pp. 1-42
- [351] T. Hiramatsu, Theory of automorphic forms of weight 1 Investigations in number theory, Advances in pure mathematics $13,\,1988,\,p.\,503-584$
- [352] M. Hirsch, Differential topology, Springer Verlag, 1976
- [353] F. Hirzebruch, Hilbert modular surfaces, Ens. Math. n°19, 1973, pp. 183-281
- [354] F. Hirzebruch, D. Zagier, The Atiyah-Singer theorem and elementary number theory, Mathematics Lecture Series n°3, Publish or Perish Inc., 1974, pp. 92-165
- [355] F. Hirzebruch, T. Berger, R. Jung, Manifolds and modular forms, Vieweg, 1992
- [356] G. Hjorth, A. S. Kechris, The complexity of the classification of Riemann surfaces and complex manifolds, Illinois Journal of Mathematics, vol. 44 n°1, 2000, pp. 104-137
- [357] A. E. Bryson Jr., Yu-Chi Ho, Applied optimal control, Hemisphere Publishing Co, 1975
- [358] G. Hochschild, T. Nakayama, Cohomology in class field theory, Ann. of Math. 55, 1952, pp. 348-366
- [359] M. Höchster, Prime ideal structure in commutative rings, Trans. Amer. Math. Soc. n°142, 1969, pp. 43-60
- [360] A. S. Holevo, Quantum coding theorems, Russian Math. Surveys 53:6, 1998, pp. 1295-1331
- [361] P. Alexandroff, H. Hopf, Topologie, Springer Verlag, 1935
- [362] L. Hopf, Introduction to the differential equations of physics, Dover, 1948
- [363] H. Hopf, Differential geometry in the large, Lecture Notes in Mathematics n°1000, Springer Verlag, 1983
- [364] R. D. Horowitz, Characters of free groups represented in the two-dimensional special linear group, Comm. in Pure and Applied Math. vol XXV, 1972, pp. 635-649
- [365] R. Howe, Eng Chye Tan, Non abelian harmonic analysis, applications of $SL(2,\mathbb{R})$, Springer Verlag, 1992
- [366] T. Hsu, Quilts : central extensions, braid actions and finite groups, Lecture Notes in Mathematics $n^{\circ}1731$, Springer Verlag, 2000
- [367] Y. Z. Huang, Two dimensional conformal geometry and vertex operator algebra, Progress in Mathematics n°148, Birkhauser, 1997
- [368] W. W. Hulsbergen, Conjectures in arithmetic algebraic geometry, Vieweg, 1992
- [369] K. Hulek, C. Kahn, S. H. Weintraub, Moduli spaces of abelian surfaces: compactification, degenerations and theta functions, Walter de Gruyter, 1993
- [370] P. Humbert, Le calcul symbolique, Hermann, 1934
- [371] J. E. Humphreys, Reflexion groups and Coxeter groups, Cambridge University Press, 1990
- [372] S.P. Humphries, Action of braid groups on determinantal ideals, compact spaces and a stratification of Teichmüller spaces, Invent. Math. 144, 2001, pp. 451-505
- [373] B. Hunt, The geometry of some special arithmetic quotients, Lecture Notes in Mathematics 1637, Springer Verlag, 1996
- [374] N. E. Hurt, The prime geodesic theorem and quantum mechanics on finite volume graphs : a review, Reviews in Mathematical Physics vol. 13 $n^{\circ}12$, 2001, pp. 1459-1503
- [375] D. Husemöller, Elliptic curves, Graduate texts in mathematics 111, Springer Verlag, 1986
- [376] D. Husemöller, Fibre bundles, Graduate texts in mathematics 20, Springer Verlag, 1975
- [377] R. C. Hwa, V. L. Teplitz, Homology and Feynman integrals, W. A. Benjamin, 1966
- [378] Y. Ihara, The congruence monodromy problems, J. Math. Soc. Japan 20, 1968, pp. 107-121

- [379] Y. Ihara, Non abelian class fields on finite fields in special cases, Proc. Intern. Congress of Mathematics Nice vol. 1, 1970, pp. 381-389
- [380] Y. Imayoshi, M. Taniguchi, An introduction to Teichmüller spaces, Springer Verlag, 1992
- [381] L. M. Ionescu, On categorification, arXiv.org, math.CT/9906038, 6 jun 1999
- [382] Y. Ito, I. Nakamura, Hilbert schemes and simple singularities, New trends in algebraic geometry (Proceedings of the algebraic symposium, Warwick, 1996), Cambridge University Press, 1999, pp. 151-233
- [383] N. V. Ivanov, Algebraic properties of the mapping class groups of surfaces, Geometric and algebraic topology, Banach Center Publications vol.18, Polish Scientific Publishers, Warszava, 1986, pp. 15-35
- [384] N. V. Ivanov, Automorphisms of Teichmüller modular groups, Topology and geometry (Rohlin seminar), Lecture Notes in Mathematics n°1346, Springer Verlag, 1989
- [385] N. V. Ivanov, Subgroups of Teichmüller modular groups, Translations of mathematical monographs n°115, A.M.S., 1992
- [386] B. Iversen, Hyperbolic geometry, London Mathematical Society Student Texts 25, Cambridge University Press, 1992
- [387] H. Iwaniec, Topics in classical automorphic forms, Graduate studies in Mathematics, vol. 17, A.M.S., 1997
- [388] S. Iyanaga, The theory of numbers, North Holland, 1975
- [389] A. Jackson, http://www.ams.org/new-in-math/mathnews/motivic.html
- [390] C. G. Jacobi, Fundamenta Nova, Gesammelte Werke 1, pp. 497-538, G. Reimer ed., 1881 (certaines traductions sur www.math.ohio-state.edu/~econrad/ Jacobi)
- [391] R. Jacquard et autres, Technique et science informatiques, Hermès, 2000
- [392] J. Jahnel, The Brauer-Severi variety associated with a central simple algebra: a survey, Mathematisches Institut, Göttingen, 25/09/2000, http://www.uni-math.gwdg.de/jahnel
- [393] M. Jarnicki, P. Pflug, Extension of holomorphic functions, De Gruyter Expositions in Mathematics 34, 2000
- [394] R. V. Jean, Croissance végétale et morphogénèse, Masson et Presses de l'Université du Québec, 183
- [395] P. Jeanquartier, Transformation de Mellin et développements asymptotiques, L'Enseignement Mathématique, tome XXV Fascicule 1-2, Janvier-Juin 1979, pp. 285-308
- [396] Y. Jin, A. L. Schmidt, A diophantine equation appearing in diophantine approximation, Indag. Mathem. 12 n°4, 2001, pp. 477-482
- [397] D. L. Johnson, Presentation of groups, London Mathematical Lecture Notes Series n°22, Cambridge University Press, 1976
- [398] G.A. Jones, Characters and surfaces: a survey, The atlas of finite groups ten years on (Ed. R. Curtis, R. Wilson), London Mathematical Society Lecture Notes Series n°249, Cambridge University Press, 1998, pp. 90-118
- [399] V. F. R. Jones, Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials, Ann. of Math. 126, 1897, pp. 335-388
- [400] J. Jost, Compact Riemann surfaces, Springer Verlag, 1997
- [401] A. Juhl, Cohomological theory of dynamical zeta functions, Progress in Math. n°194, Birkhauser, 2001
- [402] V. G. Kac, Infinite dimensional algebras, Dedekind's η-function, classical Moebius function and the very strange formula, Adv. in Math., 30, 1978, pp.85-131
- [403] V. G. Kac, An elucidation of "Infinite-dimensional algebras... and the very strange formula." $E_8^{(1)}$ and the cube root of the modular invariant, Adv. in Math. , 35, 1980, pp.264-273
- [404] V. G. Kac, Infinite dimensional Lie algebras, Cambridge University Press, 1990
- [405] V. G. Kac, P. Cheung, Quantum calculus, Universitex, Springer Verlag, 2002
- [406] M. Kapranov, E. Vasserot, Kleinian singularities, derived categories and Hall algebras, Math. Ann. 316, 2000, p. 565-576

- [407] L. Kari, DNA computing: arrival of biological mathematics, The Mathematical Intelligencer, vol 19 n°2, 1997, pp. 9-22
- [408] S. Katok, Fuchsian groups, The University of Chicago Press, 1992
- [409] S. Katok, Reduction theory for fuchsian groups, Math. Ann. 273, 1986, pp. 461 470
- [410] S. Katok, Coding of closed geodesics after Gauss and Morse, Geometriae Dedicata, $n^{\circ}63$, 1996, pp. 123-145
- [411] A. Katok, H. Hasselblatt, Introduction to the modern theory of dynamical systems, Cambridge University Press, 1995
- [412] L. H. Kauffman, Knots and physics, World Scientific, 1991
- [413] L. H. Kauffman, On knots, Ann. of Math. Stud. 115, Princeton University Press, 1987
- [414] L. H. Kauffman, Rational tangles, Advances in Applied Mathematics 18, 1997, pp. 300-332
- [415] L. Kaup, B. Kaup, Holomorphic functions of several variables, De Gruyter Studies in Mathematics 3, Walter de Gruyter, 1983
- [416] L. Keen, Canonical polygons for finitely generated fuchsian groups, Acta. Math. 115, 1965, pp. 1-16
- [417] L. Keen, Intrinsic moduli on Riemann surfaces, Annals of Mathematics Studies 84, 1966, pp. 404-420
- [418] L. Keen, On Fricke moduli, Advances in the theory of Riemann surfaces (Ed. L. Ahlfors), Annals of Mathematics Studies 66, Princeton University Press, 1971, pp. 205-224
- [419] L. Keen, On fundamental domains and the Teichmuller modular group, Contribution to analysis, Academic Press, New York and London, 1974, pp. 185-194
- [420] L. Keen, A rough fundamental domain for Teichmüller spaces, Bull. Amer. Math. Soc. vol. 83, n°6, 1977, pp. 1199-1226
- [421] L. Keen, H.E. Rauch, T. Vasquez, Moduli of punctured tori and the accessory parameter of Lamé's equation, Trans. Amer. Math. Soc. vol 255, 1979, pp. 201-230
- [422] G. R. Kempf, Complex abelian varieties and theta functions, Springer Verlag, 1991
- [423] M. A. Kervaire, A manifold which does not admit any differentiable structure, Comm. Math. Helv. n°34, 1960, pp. 257-270
- [424] M. A. Kervaire, J. Milnor, Groups of homotopy spheres, Ann. of Math. 77, 1963, pp. 504-537
- [425] A. L. Kholodenko, Statistical mechanics of 2+1 gravity from Riemann zeta function and Alexander polynomial: exact results, Journal of Geometry and Physics 38, 2001, pp. 81-139, http://chemistry.clemson.edu/ChemDocs/faculty.html
- [426] A. L. Kholodenko, Random walks on figure eight: From polymers through chaos to gravity and beyond, Physica A 289, 2001, ArXiv:cond-mat/9905221v1,14 may 1999, http://chemistry.clemson.edu/ChemDocs/faculty.html
- [427] A. Yu Kitaev, Quantum computations: algorithms and error correction, Russian Math. Surveys 52:6, 1997, pp. 1191-1249
- [428] F. Klein, Le programme d'Erlangen, Gauthiers Villars, 1974
- [429] F. Klein, The icosahedron and the solution of equations of the fifth degree, Dover, 1956
- [430] F. Klein, Sur une représentation géométrique du développement en fraction continue ordinaire, Nouv. Ann. Math. vol.3 n°15, pp. 327-331
- [431] H. Kleinert, Path integrals in quantum mechanics, statistics and polymer physics, World Scientific, Singapore, 1990
- [432] A. A. Klyachko, Moduli of vector bundles and number of classes, Func. Anal. and its appli. 25, 1991, pp. 81-83
- [433] A. A. Klyachko, Stable bundles, representation theory and hermitian operators, Sel. Math. new ser. 4, 1998, pp. 419-445
- [434] A. W. Knapp, Elliptic curves, Mathematical notes n°40, Princeton University Press, 1992
- [435] A. Knauf, Number theory, dynamical systems and statistical mechanics, Max Planck Institute for Mathematics in the Sciences, May 1998, knauf@mis.mpg.de
- [436] M. I. Knopp, Modular functions in analytic number theory, Markham Pub. Company, 1970

- [437] D. E. Knuth, The art of computer programming, Addison Wesley Reading, 1968
- [438] N. Koblitz, Introduction to elliptic curves and modular forms, Springer Verlag, 1984
- [439] H. Koch, Introduction to classical mathematics 1 (from the quadratic reciprocity law to the uniformization theorem), Kluwer Academic Publishers, 1991
- [440] J. Kollár, Complex algebraic geometry, IAS/Park City Mathematics Series vol. 3, AMS/ Institute for Advanced Studies, 1997
- [441] Y. Komory, T. Sugawa, Bers embedding of the teichmuller space of a once-punctured torus, www.cajpn.org/complex/pp01/0107.ps.gz
- [442] T. Kondo, Examples of multiplicative η -products, Sci. pap. Coll. Arts and Sci. Univ. Tokyo 35, 1986, pp. 113-189
- [443] A. Korkine, G. Zolotareff, Sur les formes quadratiques positives, Math. Annalen, n°6, 1873, pp.366-389
- [444] B. Kostant, On MacDonald's η -function formula, the laplacian and generalized exponents, Advances in Maths. 20, 1976, pp. 179-212
- [445] M. Kotani, A note on asymptotic expansions for closed geodesics in homology classes, Math. Ann. 320, 2001, pp. 507-529
- [446] I. Kra, On lifting of Kleinian groups to $SL(2,\mathbb{C})$, Differential geometry and complex analysis (Ed. I. Chavel, H. M. Farkas), Springer Verlag, 1985, pp. 183-193
- [447] J. Krajícek, T. Scanlon, Combinatorics with definable sets: Euler characteristics and Grothendieck rings, The Bulletin of Symbolic Logic, vol 6 n°3, sept. 2000, pp. 311-330
- [448] S. L. Krushkal, B. N. Apanasov, N. A. Gusevskiì, Kleinian groups and uniformization in examples and problems, Translations of Mathematical Monographs 62, A.M.S., 1986
- [449] S. L. Krushkal, Spaces of Riemann surfaces, Israel mathematical conference proceedings vol 14, 2000, www.math.technion.ac.il/~pbrooks/imcp14/krushkal.ps
- [450] M. Kuga, Galois'dream, Birkhäuser, 1993
- [451] R. S. Kulkarni, An arithmetic-geometric method in the study of the subgroups of the modular group, American Journal of Mathematics 113, 1991, pp. 1053-1133
- [452] V. Kumar Murty, Introduction to abelian varieties, CRM mon. ser. vol. 3, A.M.S., 1983
- [453] G. Lachaud, Klein polygons and geometric diagrams, Sails and Klein Polyedra, Contemporary Matthematics vol. 210, 1998, pp. 365-385
- [454] P. de la Harpe, Topics in geometric group theory, Chicago Lectures in Mathematics, 2000
- [455] K. Lamotke, Regular solids and isolated singularities, Vieveg Advanced lectures in Mathematics, 1986
- [456] N. P. Landsman, Quantization as a functor, http://fr-arXiv.org/dvi/math-ph/0107023gz?front
- [457] S. Lang, Survey of diophantine geometry, Springer Verlag, 1997
- [458] S. Lang, Introduction to abelian and algebraic functions, Graduate texts in mathematics n°89, Springer Verlag, 1983
- [459] M. L. Lapidus, M. van Frankenhuysen, Fractal geometry and number theory, Birkhaüser, 2000
- [460] R. Grossman, R. G. Larson, Hopf algebraic structure of families of trees, J. of Algebra 126, 1989, pp. 185-210
- [461] H. B. Laufer, Normal two-dimensional singularities, Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press, 1971
- [462] G. Laumon, La correspondance de Langlands sur les corps de fonctions (d'après Laurent Lafforgue), Séminaire Bourbaki n°873, 1999-2000
- [463] C. Laurent-Thiébaut, Théorie des fonctions holomorphes de plusieurs variables, Interéditions/CNRS Editions, 1997
- [464] W. R. Lawrence, Subsequent to a theorem of Markoff, J. of Number Theory 12, 1980, pp. 201-209
- [465] A. M. Legendre, Théorie des nombres, réédition A. Blanchard, 1955

- [466] D. Lehmann, C. Sacré, Géométrie et topologie des surfaces, PUF, 1982
- [467] J. Lehner, Discontinuous groups and automorphic functions, Math. Survey, A.M.S., 1964
- [468] G. I. Lehrer, Group representations, geometry and topology, Groups Canberra 1989, Lecture Notes in Math. 1456, Springer Verlag, 1990, pp. 1-9
- [469] R. Lehoucq, M. Lachieze-Rey, J. P. Luminet, Cosmic cristallography, Astron. Astrophys. vol. 313, 1996, pp. 339-346
- [470] P. M. Gruber, C. G. Lekkerkerker, Geometry of numbers, North Holland Mathematical Library, vol. 37, 1987
- [471] A. Le Méhauté, R. R. Nigmatullin, L. Nivanen, Flèches du temps et géométrie fractale, Hermès. 1990
- [472] F. Lemmermeyer, Evolution of reciprocity laws from Euler to Artin, Springer Verlag, 2000
- [473] J. Le Potier, Lecture on vector bundles, Cambridge studies in advanced mathematics 54, Cambridge University Press, 1997 (version antérieure moins développée : Fibrés vestoriels sur les courbes algébriques, Pub. Math. Univ. Paris 7, octobre 1995)
- [474] S. Leroy, Points de Weierstrass d'une surface de Riemann compacte, Le journal de maths des élèves, ENS Lyon, vol 1, 1994 n°2, p.16-25
- [475] N. C. Leung, ADE-bundle over rational surfaces, configuration of lines and rulings, arXiv.math. AG/0009192v1 20 sep 2000
- [476] M. Levine, Homology of algebraic varieties: an introduction to the works of Suslin and Voevodsky, Bull. A.M.S vol. 34, n°3, 1997, pp. 293-312
- [477] P. Levy Bruhl, Précis de géométrie, P.U.F., 1967
- [478] L. Lewin, Polylogarithms and associated functions, North Holland, 1981
- [479] J. D. Lewis, A survey of the Hodge conjecture, CRM Monograph series vol 10, American Mathematical Society, 1999
- [480] H. Lewy, Water waves on sloping beaches, Bull. Amer Math. Soc. 52, 1946, p. 737-775
- [481] S. Lichtenbaum, Values of zeta functions, etale cohomology, and algebraic K-theory, Lecture Notes in Mathematics 342, Springer Verlag, 1973, pp. 489-501
- [482] Ming Li, P. Vitányi, An introduction to Kolmogorov complexity and its applications, Springer Verlag, 1997
- [483] G. Ligozat, Courbes modulaires de genre 1, Thèse, Bull. Soc. Math. France, mémoire 43, 1975 (Formes paraboliques normalisées pour $\Gamma_0(N)$, prépub. n°757411, Paris XI Orsay)
- [484] D. Lind, B. Marcus, An introduction to symbolic dynamics and coding, Cambridge University Press, 1995
- [485] J. V. van Lint, G. van der Geer, Introduction to coding theory and algebraic geometry, Birkhäuser, 1988
- [486] D. Lines, Cobordisme de noeuds classiques fibrés et de leur monodromie, Noeuds, tresses et singularités, Séminaire de Plan sur Bex (Suisse) en Mars 1982, L'Enseignement Mathématique
- [487] K. Liu, Invariant theory and the invariants of low dimensional topology, Topology vol. 38 n°4, 1999, pp. 763-777
- [488] S. Lloyd, Quantum mechanical computers and uncomputability, Physical Review Letter vol. 71, 1993, pp. 943-946
- [489] J. L. Lluis Puebla, J. L. Loday, H. Gillet, C. Soulé, V. Snaith, Higher algebraic K-theory: an overview, Lecture Notes in Mathematics n°1491, Springer Verlag, 1992
- [490] N. I. Lobatcheffsky, Collection complète de oeuvres géométriques, Edition de l'Université de Kasan, tome 2, Pangéométrie ou précis de géométrie fondée sur une théorie générale et rigoureuse des parallèles, 1886
- [491] J. L. Loday, Des mammouths à la K-théorie algébrique, http://www-irma.u-strasbourg.fr/~loday/[mammouth] et [arithmetree], 2000
- [492] A. Lubotzky, A. R. Magid, Varieties of representations of finitely generated groups, Memoirs of the A.M.S. n°336, vol 58, 1985

- [493] W. Lück, A basic introduction to surgery theory, Preprintereihe des SFB 478, Westfälischen Wilhems Universität Münster, helf 197, Novembre 2001
- [494] F. Luo, Characters of SL(2) representations of groups, arXiv:math. GT/9905138, 21/05/99
- [495] F. Luo, Grothendieck's reconstruction principle and 2-dimensional topology and geometry, arXiv: math. GT/9904019, 4 Apr 1990
- [496] R. C. Lyndon, J. L. Ullman, Pairs of real 2 by 2 matrices that generate free products, Michigan Math. J. 15, 1968, pp. 161-166
- [497] R. C. Lyndon, P. E. Schupp, Combinatorial group theory, Springer Verlag, 1977
- [498] O. Ly, On effective decidability of the homeomorphism problem for non compact surfaces, Contemporary Mathematics, vol 250, 1999, p. 89-112
- [499] H. Maass, Über eine neue Art von nichtanalytischen automorphen Funktionen und die Bestimmung Dirichletscher Reichen durch Funktional gleichung, Math. Ann. n°121, 1949, pp. 141-183
- [500] I. G. MacDonald, Affine root systems and Dedekind's η-function, Invent. Math. 15, 1972, pp. 91-143
- [501] I. G. MacDonald, Affine Hecke algebras and orthogonal polynomials, Séminaire Bourbaki n°797, 1995, pp. 1-18
- [502] G. Mack, Universal dynamics, a unified theory of complex systems, emergence, life and death, Commun. Math. Phys. 219, 2001, p. 141-178
- [503] R. S. MacKay, Recent progress and outstanding problems in hamiltonian dynamics, Physica D 86, 1995, pp. 122-133
- [504] G. W. Mackey, The scope and history of commutative and non commutative harmonic analysis, History of mathematics, vol. 5, A.M.S., L.M.S., 1992
- [505] S. MacLane, Categories for the working mathematician, Springer Verlag, 1971
- [506] S. MacLane, Hamiltonian mechanics and geometry, 1970, Amer. Math. Monthly 77, 1970, pp. 570-586
- [507] F. J. MacWilliams, N. J. Sloane, The theory of error correcting codes, North Holland, 1978
- [508] S. Majid, Foundations of quantum group theory, Cambridge University Press, 1995
- [509] S. Majid, A Macfarlane, Spectrum generating quantum group of the harmonic oscillator, Int. J. Mod. Phys. A 7, 1992, pp. 4377-4393
- [510] W. Magnus, Rational representations of Fuchsian groups and non parabolic subgroups of the modular group, Nachrichten des Akademie des Wissenschaften in Göttingen II, Math.-Phys. Klasse (1973), pp. 179-189
- [511] W. Magnus, A. Karass, D. Solitar, Combinatorial group theory, Dover (2nd edition), 1976
- [512] W. Magnus, Non-euclidean tessellations and their groups, Academic Press, 1974
- [513] R. S. Maier, Algebraic solutions of the Lamé equation, revisited, Submitted to the Journal of Differential Equations, 2002, http://uranium.math.arizona.edu/~rsm/cv.html
- [514] A. V. Malyshev, Markoff and Lagrange spectra (survey of the literature), J. Soviet. Math. vol 16 n°1, 1981, pp. 767-788
- [515] Yu. I. Manin, Cubic forms, North Holland, 1986
- [516] Yu. I. Manin, M.A. Tfasman, Rational varieties: algebra, geometry, arithmetic, Russian Math. Surveys 41, 1986, pp. 51-116
- [517] Yu. I. Manin, Quantum computing and Shor's factoring algorithm, arXiv :math.
- [518] Yu. I. Manin, Reflections on arithmetical physics, Conformal invariance and string theory, Academic Press, 1989, pp. 293-303 (voir aussi son article New dimensions in geometry, et le commentaire de M. Atiyah, 25th Arbeuitstagung)
- [519] Yu. I. Manin, M. Marcolli, Continued fractions, modular symbols, and non commutative geometry, arXiv:math.NT/0102006 v2 7 aug 2001
- [520] X. Marsault, Compression et cryptage en informatique, Hermès, 1995
- [521] G. V. Margulis, Discrete subgroups of semi simple Lie groups, Springer, 1991

- [522] A.A. Markoff, Sur les formes quadratiques indéfinies, Math. Ann. 6, 1879, pp. 381-406; Math. Ann. 17, 1880, pp. 379-399
- [523] Y. Martin, Multiplicative η -quotients, Trans. Amer. Math. Soc. n° 348, 1996, pp. 4825
- [524] Y. Martin, On Hecke operators and products of the Dedekind η -function, C.R. Acad. Sci. Paris t.322 ser.1, 1996, pp. 307-312
- [525] J. Martinet, Les réseaux parfaits des espaces euclidiens, Masson, 1996
- [526] B. Maskit, Parameters for fuchsian groups II: topological type (1,1), Annales Academiae Scientarum Fennicae, Series A.I. Mathematica, vol 14, 1989, pp. 265-275
- [527] W. S. Massey, Algebraic topology: an introduction, Graduate Texts in Mathematics n°56, Springer Verlag, 1967
- [528] J. P. Matelski, The classification of discrete 2-generator subgroups of $PSL(2,\mathbb{R})$, Israel J. Math. 42, 1982, pp. 309-317
- [529] Y. Matiiassevitch, Le dixième problème de Hilbert, son indécidabilité, Masson, 1995
- [530] M. Matsumoto, A presentation of mapping class groups in terms of Artin groups and geometric monodromy of singularities, Math. Ann. 316, 2000, pp. 401-418
- [531] K. Maurin, The Riemann legacy, Riemann ideas in mathematics and physics, vol. 417, Kluwer Academic Publishers, 1997
- [532] B. Mazur, Arithmetic on curves, Bull. Amer. Math. Soc. vol.14 n°2, 1986, pp. 207-259
- [533] B. Mazur, Number theory as gadfly, Amer Math. Monthly, 1991, pp. 593-610
- [534] B. Mazur, Modular curves and the Eisenstein ideal, Publ. Math. IHES 47, 1977, pp. 33-186
- [535] A. Melikidze, Physics literature, Condensed Matter Theory, http://pupgg.princeton.edu/ ~melikidze/lit.htmlx
- [536] R. B. Melrose, The Atiyah-Patodi-Singer index theorem, Research notes in mathematics vol. 4, A. K. Peters, 1993
- [537] M. Mendès-France, The Planck constant of a curve, Cours donné à Montréal, juillet 1989
- [538] M. Mendès-France, A. Sebbar, Pliages de papiers, fonctions thêta et méthode du cercle, Acta Math. 183, 1999, pp. 101-139
- [539] Ch. Mercat, Discrete Riemann surfaces and the Ising model, Commun. Math. Phys. 218, 2001, pp. 177-216
- [540] J. L. Meyer, Characters analogues of Dedekind sums and transformations of analytical Eisentstein series, Pacific Math. J. 194, 2000, pp. 137-164
- [541] S. Meskin, Periodic automorphisms of the two-generator free group, Proceedings of the second international conference on the theory of groups, Canberra, Lecture Notes in Mathematics $n^{\circ}372$, Springer Verlag, 1973, pp. 494-498
- [542] J. S. Milne, Elliptic curves, Math 679, Winter 1996, www.math.lsa.umich.edu/~jmilne/
- [543] J. S. Milne, Modular functions and modular forms, Math 678, Fall 1990, www.math.lsa. umich.edu/~jmilne/
- [544] J. S. Milne, Lectures on etale cohomology, Math 776, Winter 1998, www.math.lsa.umich.edu /~jmilne/
- [545] J. Milnor, Topology from the differential point of view, University Press of Virginia, 1965
- [546] J. Milnor, On manifolds homomorphic to the 7-sphere, Ann. of Math. 64, 1956, pp. 399-405
- [547] J. Milnor, Singular points of complex hypersurfaces, Annals of Mathematics Studies 61, Princeton University Press, 1968
- [548] J. Milnor, P. Orlik, Isolated singularities defined by weighted homogeneous polynomials, Topology vol.9, 1970, pp. 385-393
- [549] J. Milnor, Hyperbolic geometry: the first 150 years, Bull. Amer. Math. Soc. 6, 1982, pp. 9-24
- [550] J. Minác, M. Spira, Witt rings and Galois groups, Ann. of Math.. 144, 1996, pp. 35-60
- [551] V. P. Mineev, Topologically stable defects and solitons in ordered media, Harwood Academic Publishers, 1998

- [552] H. Minkowski, Geometrie der Zahlen, Leipzig, 1896, réédition Johnson, 1968
- [553] Y. N. Minsky, The classification of punctured-torus groups, Ann. of Math. 149 n°2, 1999, pp. 559-626
- [554] R. Miranda, Algebraic curves and Riemann surfaces, Graduate Studies in Mathematics 5, A.M.S., 1997
- [555] T. Miyake, Modular forms, Springer Verlag, 1989
- [556] R. Mneimné, F. Testard, Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques, Hermann, 1997
- [557] H. McKean, V. Moll, Elliptic curves, Cambridge University Press, 1999
- [558] M. Monatstyrsky, Riemann, topology, and physics, Birkhäuser, 1999
- [559] R. Moore, http://www-texdev.mpce.mq.edu.au/Quantum/Quantum/node1.html
- [560] C. Moore, Predictability and undecidability in dynamical systems, Physical Review Letters vol 64, 1990, pp. 2354-2357
- [561] L. J. Mordell, Diophantine equations, Academic Press, 1969
- [562] J. Moser, Integrable hamiltonian systems and spectral theory, Accademia Nazionale di Lincei, 1983
- [563] L. Mosher, Train tracks expansions of measured foliations, preprint http://newark.rutgers.edu/~mosher
- [564] L. Mosher, What is...a train track? Notices of the American Mathematical Society, March 2003, vol 50, n°3, p. 354-355
- [565] G. D. Mostow, Strong rigidity of locally symmetric spaces, Annals of Mathematics Studies 78, Princeton University Press, 1973
- [566] G. Mounier, Les ondes en physique : de Pythagore à nos jours (Vibrations, ondes, impulsions), Ellipse, 2002
- [567] J. O. Moussafir, Voiles et polyèdres de Klein, géométrie, algorithmes et statistiques, Thèse à l'Université Paris XI Dauphine, 28 janvier 2000
- [568] J. E. Moyal, Quantum mechanics as a statistical theory, Proc. Camb. Phil. Soc. 45, 1949, pp. 99-124
- [569] A. Mozgova, Culler's algorithm for the group $SL(2,\mathbb{Z})$, Methods Funct. Anal. Topology 7(4), 2001, pp. 81-84
- [570] W. Muller, The eta invariant some recent developments, Séminaire Bourbaki, n°787, 1993-1994, pp. 1-25
- [571] D. Mumford, Tata lectures on theta (I), Progress in mathematics vol. 28, Birkäuser, 1983
- [572] D. Mumford, Curves and their jacobians, The University of Chicago Press, 1976
- [573] D. Mumford, Algebraic geometry I, Complex projective varieties, Springer Verlag, 1978
- [574] T. Munzer, P. Burchard, Visualizing the structure of the world wide web in 3d hyperbolic space, http://www.geom.umn.edu/docs/research/webviz, 1995
- [575] K. Murasugi, Knot theory and its applications, Birkhaüser, 1996
- [576] G. Myerson, On semi-regular finite continued fractions, Archiv. Math. n°48, 1987, pp. 420-425
- [577] G. L. Naber, Topology, geometry, and gauge fields (Foundations), Springer Verlag, 1997
- [578] S. Nag, The complex analytic theory of Teichmüller spaces, Wiley Interscience, 1988
- [579] T. Nagell, Sur les propriétés arithmétiques des cubiques planes du premier genre, Skrifter Norske Videnskaps-Akademii i Oslo, n°1, 1935, pp. 1-25
- [580] M. Nakahara, Geometry topology and physics, IOP Publishing Limited, 1990
- [581] Ch. Nash, S. Sen, Topology and geometry for physicists, Academic Press, 1983
- [582] Ch. Nash, Differential topology and quantum field theory, Academic Press, 1996
- [583] S. M. Natanzon, Moduli of Riemann surfaces, Hurwitz-type spaces and their superanalogues, Russian Mathematical Surveys 54 n°1, pp. 61-116

- [584] E. Nelson, Derivation of the Schrödinger equation from newtonian mechanics, Physical Review 15 n $^{\circ}$ 4, 28 oct. 1966, pp. 1079-1085
- [585] A. Némethi, Dedekind sums and the signature of $f(x, y) + z^N$, Sel. Math., New ser. 4, 1998, pp. 361-376, Sel. Math., New ser. 5, 1999, pp. 161-179
- [586] A. Némethi, The signature of $f(x,y)+z^N$, Singularity theory, B. Bruce, D. Mond eds., LNS 263, Cambridge University Press, 1999
- [587] Y. V. Nesterenko, P. Philippon, Introduction to algebraic independence theory, Lecture Notes in Mathematics n° 1752, Springer Verlag, 2001
- [588] M. Newman, Integral matrices, Academic Press, 1972
- [589] M. Newman, Classification of normal subgroups of the modular group, Trans. Amer. Math. Soc. $\rm n^{\circ}126,\ 1967,\ pp.\ 267-277$
- [590] M. Newman, Pairs of matrices generating discrete free groups and free products, Michigan Math. J. $n^{\circ}15$, 1968, pp. 155-166
- [591] Ch. Ngô, H. Ngô, Physique quantique, Masson, 1991
- [592] J. Nielsen, Collected Mathematical Papers, Vol. 1, Birkhaüser, 1986
- [593] J. Nielsen, Die Isomorphismengruppe der freien Gruppen, Math. Ann. n°91, 1924, pp. 169-209, in Collected Mathematical Papers, Vol. 1, Birkhaüser, 1986
- [594] W. Fenchel, J. Nielsen, On discontinuous groups of isometric transformations of the noneuclidean plane, Courant, Anniversary volume, 1948, in Collected Mathematical Papers of J. Nielsen, Vol. 1, Birkhaüser, 1986
- [595] M. A. Nielsen, I. L. Chuang, Quantum computation and quantum information, Cambridge University Press, 2002
- [596] V. V. Nikulin, Discrete reflection groups in Lobachevky spaces and algebraic surfaces, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Berkeley, California, 1986, pp. 654-671
- [597] D. Yu. Nogin, Notes on exceptional vector bundles and helices, Lecture Notes in Mathematics 1419, Springer Verlag, 1989, pp. 181-195
- [598] D. Yu. Nogin, Spirals of period four and equations of Markov type, Math. Ussr Izvestiya vol. 37, 1991, p. 209-226
- [599] L. Nottale, Fractal space-time and microphysics, towards a theory of scale relativity, World Scientific, 1993
- [600] S. Novikov, S. V. Mankov, L. P. Pitaevskii, V.E. Zakharov, Theory of solitons, Plenum Press, 1984
- [601] M. Oka, Non-degenerate complete intersection singularity, Hermann, 1997
- [602] Ch. Okonek, M. Scheider, H. Spindler, Vector bundles on complex projective spaces, Birkhäuser, 1980
- [603] http://www.math.okstate.edu/~loriw/degree2/degree2hm/eta2/eta2.html
- [604] T. Ono, Vector bundles on a cubis surface whose restrictions to line are rigid, SUT journal of Mathematics vol. $36~\rm n^\circ 1,\,2000,\,pp.\,83-98$
- [605] K. Ono, Y. Martin, Eta quotients and elliptic curves, Proc. Amer. Math. Soc. 125 n°11, 1997, pp. 31689-3176
- [606] E. M. Opdam, Multivariable hypergeometric functions, European Congress of Mathematics (Barcelona 2000) vol. 1, C. Casacubuta et als. eds., Progress in Mathematics 201, Birkhauser 2001, voir aussi mat.uab.es/ art3ecm/ opdam.pdf
- [607] R. P. Osborne, H. Zieschang, Primitives in the free group of two generators, Invent. Math. $n^{\circ}63$, 1981, pp. 17-84
- [608] W. Parry, M. Pollicott, An analogue of the prime number theorem and closed orbits of Axiom A flows, Annals of Math. 118, 1983, pp. 573-591
- [609] W. Parry, M. Pollicott, Zeta functions and the periodic orbit structure of hyperbolic dynamics, S.M.F., Astérisque vol. 187-188, 1990
- [610] I. Pays, Arbres, ordres maximaux et formes quadratiques entières, Number theory Paris 1992-1993, Lecture Notes Series n°215, London Mathematical Society, 1995, pp. 209-230

- [611] A. Karass, A. Pietrowski, D. Solitar, Automorphisms of a free product with an amalgamed subgroup, Contemporary Mathematics 33, A.M.S., 1984, pp. 328-340
- [612] R. C. Penner, J. L. Harer, Combinatorics of train tracks, Ann. of Math. Studies vol. 125, Princeton University Press, 1992
- [613] R. Penrose, L'esprit, l'ordinateur et les lois de la physique, InterEditions, 1993
- [614] J. C. Perez, L'ADN décrypté, la découverte et les preuves du langage caché de l'ADN, Préface de Jean Marie Pelt, Résurgence, 1997
- [615] G. Cohen, P. Godlewki, S. Perrine, Idempotents of cyclic codes, International symposium on information theory, Ronneby Sweden, 21-24 june 1976, IEEE 76CH1095-9T
- [616] G. Cohen, P. Godlewki, S. Perrine, Sur les idempotents de codes, C. R. Acad. Sc. t. 284, série A, février 1977, pp. 509-512
- [617] S. Perrine, A new aspect of some Post algebras, The eight symposium on multiple valued logic, 24-26 may 1978, Rosemont Illinois
- [618] S. Perrine, Logique multivalente, Annales des Télécommunications, tome 33, n°11 − 12, Nov-Dec 78, pp. 376-382
- [619] S. Perrine, Thèse, Université de Metz, décembre 1988
- [620] S. Perrine, Sur une généralisation de la théorie de Markoff, Journal of Number Theory vol 37 n°2, 1991, pp. 211-230
- [621] S. Perrine, La méthode de Poincaré appliquée à l'arithmétique, Congrès International Henri Poincaré, Nancy, mai 1994
- [622] S. Perrine, L'arithmétique sur une surface percée, Annales des Télécommunications, tome 51, n°7-8, 1996, pp. 407-420
- [623] S. Perrine, Sur des equations diophantiennes généralisant celle de Markoff, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse vol VI n°1, 1997, pp. 127-141
- [624] S. Perrine, Un arbre de constantes d'approximation analogue à celui de l'équation diophantienne de Markoff, Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux n°10, 1998, pp. 321-353
- [625] S. Perrine, Trees of approximation constants, Contributed talk at the conference on Continued Fractions: from analytic number theory to constructive approximation, University of Missouri, Columbia, May 20-23, 1998, Contemp. Math. n°236, A.M.S., 1999, pp. 297-310
- [626] S. Perrine, Mathématiques et télécommunications, Colloque "Théorie des nombres, bruit de fréquences et télécommunications", Institut Henri Poincaré, 3 décembre 1999
- [627] S. Perrine, On generalized Markoff equations and their interpretation, Noise, Oscillators and Algebraic Randomness, Michel Planat (Ed.), La Chapelle des Bois, 1999, Lecture Notes in Physics n°550, Springer Verlag, 2000
- [628] S. Perrine, About some diophantine equation and the resulting chaos in geodesics, 4ème Conférence Internationale CASYS'2000, HEC-Liège, Belgique, Août 2000, Computed Anticipatory Systems, American Institute of Physics, n°573, 2001, pp. 285-298
- [629] S. Perrine, L'interprétation matricielle de la théorie de Markoff classique, Preprint présenté au groupe d'étude des problèmes diophantiens, Paris, Chevaleret, 1/02/2001, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, vol 32 n°4, 2002, pp. 193-262
- [630] S. Perrine, Sommes de Dedekind et généralisations de l'équation diophantienne de Markoff, Journal of Number Theory, vol. 94 n°2, juin 2002, pp. 224-247
- [631] S. Perrine, De la théorie de Markoff aux points entiers sur les courbes elliptiques, XXIIèmes Journées Arithmétiques, Lille, 2-6 juillet 2001
- [632] S. Perrine, La théorie de Markoff et ses développements, Tessier & Aschpool, 2002, www.tessier-ashpool.fr
- [633] J. Peyrière, Wen Zhi-Ying, Wen Zhi-Xiong, Polynômes associés aux endomorphismes de groupes libres, L'Enseignement Mathématique 39, 1993, pp. 153-175
- [634] M. Planat (Ed.), Oscillateurs, bruit de fréquence, gigue des solitons, synchronisation des oscillateurs, Annales des Télécommunications tome 51 n°7 – 8, juillet-août 1996

- [635] M. Planat (Ed.) Noise, oscillators and algebraic randomness, Lectures Chapelle des Bois, 1999, Lecture Notes in Physics n°550, Springer Verlag, 2000
- [636] M. Planat, S. Dos Santos, J. Cresson, S. Perrine, 1/f frequency noise in a communication receiver and the Riemann hypothesis, 15^{th} international conference on noise in physical systems and 1/f fluctuations, Hong Kong, 1999
- [637] M. Planat, S. Dos Santos, N. Ratier, J. Cresson, S. Perrine, Closed to resonance interaction of radiofrequency waves in a Schottky diode mixer: 1/f noise and number theory, 7^{ème} Van der Ziel symposium on quantum 1/f noise, St Louis, Août 1998
- [638] M. Planat, N. Daher, N. Ratier, A quantum 1/f fluctuation in equilibrium : from Planck to Ramanujan, Van der Ziel symposium on quantum 1/f noise, Saint Louis, June 2000, Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux vol. 14, 2002, p. 585-601
- [639] M. Planat, 1/f noise, the measurement of time and number theory, Fluctuation and noise letters 1, R63-R67, 2001
- [640] M. Planat, E. Henry, The arithmetic of 1/f noise in a phase-looked loop, Appl. Phys. Letter 8(13); 2002
- [641] M. Planat, Thermal 1/f noise from the theory of partitions : application to a quartz resonator, Physica A :318, 2003, pp. 371-386
- [642] M. Planat, The hyperbolic geometry of 1/f noise in phase locked loop, arXiv.hep-th/0209243
- [643] M. Planat, H. Rosu, S. Perrine, Ramanujan sums for signal processing of low frequency noise, arXiv.org/math-ph/pdf/0209/0209002.pdf, Physical Review E66, 056128, 2002
- [644] J. E. Pommersheim, Toric varieties, lattice points and Dedekind sums, Math. Ann. n°295, 1993, pp. 1-24
- [645] J. E. Pommersheim, S. Garoufalidis, Values of zeta functions at negative integers, Dedekind sums and toric geometry, J. of the Amer. Math. Soc. Vol 14, n°1, pp. 1-23
- [646] H. Poincaré, Théorie des groupes fuchsiens, Acta. Math. n°1; 1882, pp. 1-62
- [647]~ H. Poincaré, Sur l'uniformisation des fonctions analytiques, Acta Math. n° 31, 1907, pp. 1-54
- [648] H. Poincaré, Oeuvres, Gauthier Villars (11 tomes), 1916-1956, en particulier tome 5 pour l'arithmétique et les formes quadratiques, 1950
- [649] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. B. Zamolodchikov, Infinite conformal symmetry in two dimensional quantum field theory, Nucl. Phys. B241, 1984, p. 333-380, http://ccdb3fs.kek.jp/cgi-bin/img-index?198407016
- [650] I. N. Bernstein, V. A. Ponomarev, Coxeter functors and Gabriel's theorem, Russ. Math. Surv. 28(2), 1973, pp. 17-32
- [651] E. G. C. Poole, Introduction to the theory of linear differential equations, Dover, 1960
- [652] A. J. van der Poorten, An introduction to continued fractions, Diophantine Analysis, edited by J.H. Loxton and A. J. van der Poorten, London Mathematical Society Lecture Notes Series 109, 1985, pp. 99-138
- [653] A. J. van der Poorten, K. S. Williams, Values of the Dedekind eta function at quadratic irrationalities, Canadian Journal of Mathematics vol. 51 n°1, 1999, pp. 176-224, Corrigendum vol. 53 n°2, pp. 434-443.
- [654] M. Postnikov, Leçons de géométrie, Groupes et algèbres de Lie, Editions MIR, 1985
- [655] D. Prasad, Weil representation, Howe duality and the theta correspondence, CRM Proceedings and Lecture Notes vol.1, AMS, 1993, pp. 195-127
- [656] J. Preskill, www.theory-caltech.edu/people/preskill/ph229
- [657] O. Pretzel, Codes and algebraic curves, Clarendon Press, Oxford, 1998
- [658] C. Procesi, The invariant theory of $n \times n$ matrices, Adv. in Math. 16, 1976, pp. 306-381
- [659] P. Prusinkiewicz, J. Hanan, Lindenmayer systems, fractals and plants, Lecture Notes in Biomathematics 79, Springer Verlag, 1989
- [660] T. Przebinda, The oscillator duality correspondence for the pair $O(2,2), Sp(2,\mathbb{R})$, Mem. Amer. Math. Soc. 79, 1999

- [661] N. Purzitsky, Two generator discrete free groups, Math. Z. 126, 1972, pp. 209-223
- [662] M. van des Put, M. F. Singer, Galois theory of difference equations, Springer Verlag, 1997
- [663] M. Puta, Hamiltonian mechanical systems and geometric quantization, Mathematics and its applications vol. 2690, Kluwer Academic Publishers, 1993
- [664] H. Rademacher, Topics in analytic number theory, Springer Verlag, 1973
- [665] H. Rademacher, E. Grosswald, Dedekind sums, Carus Monographs 16, 1972
- [666] C. Radin, Global order from local sources, Bull. Amer. Math. Soc vol 25 n°2, 1991, pp. 335-364
- [667] T. Radó, Uber den Begriff der Riemannschen Fläche, Acta Litt. Sci. Szeged, 2, 1925, pp. 101-121
- [668] S. Rallis, L-functions and the oscillator representation, Lecture Notes in Math. n°1245, Springer Verlag, 1987
- [669] M. Ram Murty, A motivated introduction to the Langlands program, Advances in number theory (F. G. Gouvea and N. Yui editors), Clarendon Press, 1983, pp. 37-66
- [670] J. G. Ratcliffe, Foundations of hyperbolic manifolds, Springer Verlag, 1994
- [671] M. L. Reed, Algebraic structure of genetic inheritance, Bull. Amer. Math. Soc. vol 34 n°2, Avril 1997, pp. 107-130
- [672] E.G. Rees, Notes on geometry, Universitext, Springer Verlag, 1983
- [673] R. Remak, Über indefinite binäre quadratische minimal Formen, Math. Ann. 932, 1924, pp. 155-182
- [674] M. Remoissenet, Waves called solitons, Springer Verlag, 1996
- [675] E. Reyssat, Quelques aspects des surfaces de Riemann, Progress in Mathematics n°77, Birkhäuser, 1989
- [676] B. Riemann, Oeuvres mathématiques, traduction L. Laugel, A. Blanchard, 1968
- [677] S. Robins, Generalized Dedekind η -products, Contemp. Math., vol 166, 1994, pp. 119-128
- [678] M. Ronan, Buildings, main ideas and applications, Bull. London Math. Soc. 24, 1992, pp. 1-51, et pp. 97-126
- [679] J. Rosenberg, Algebraic K-theory and its applications, Graduate texts in mathematics, Springer Verlag, 1994
- [680] S. Rosenberg, The laplacian on a Riemann manifold, London Mathematical Society Student Texts 31, Cambridge University Press, 1997
- [681] G. Rosenberger, Fuchssche Gruppen die freies Produkt zweier zyklischer Gruppen sind und die Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = xyz$, Math. Ann. 199, 1972, pp. 213-227
- [682] G. Rosenberger, G. Kern-Isberner, Uber Diskretheitsbedingungen und die diophantische Gleichung $ax^2 + by^2 + cz^2 = dxyz$, Arch. Math. vol 34, 1980, pp. 481-493
- [683] G. C. Rota, D. Kahaner, A. Odlysko, On the foundations of combinatorial theory VIII, Finite operator calculus, Journal of mathematical analysis and applications 42, 1973, pp. 684-760
- [684] G. C. Rota, J. P. S. Kung, The invariant theory of binary forms, Bull. Amer. Math. Soc. Vol 10 n°1, January 1984, pp. 25-85
- [685]~ J. J. Rotman, Notes on homological algebra, Van Nostrand Math. Stud. $\rm n^{\circ}26,\,1970$
- [686] A. N. Rudakov, The Markov numbers and exceptionnal bundles on P², Math. USSR Izvestiya, vol 32, n°1, 1989, pp. 99-112
- [687] D. Ruelle, Elements of differentiable dynamics and bifurcation theory, Academic Press, 1989
- [688] D. Ruelle, Thermodynamic formalism, Assison Wesley, 1978
- [689] D. Ruelle, An extension of the theory of Fredholm determinants, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. 72, 1990, pp.175-193
- [690] R. A. Rueppel, Analysis and design of stream ciphers, Springer Verlag, 1986
- [691] B. Davies, Y. Safarov, Spectral theory and geometry, London Mathematical Society Lecture Notes Series n°273, Cambridge University Press, 1999

- [692] K. Saito, Character variety of representations of a finitely generated group in SL_2 , Proceedings of the 37^{th} Taniguchi symposium on topology and Teichmüller spaces, World Scientific Publishing Co., 1996, pp. 253-264
- [693] K. Saito, The Teichmüller space and a certain modular function from a viewpoint of group representations, Algebraic geometry and related topics, Ed. Yang - Namikawa - Ueno, International Press, Proceedings of International Symposium Inchoen, Korea, 1993, pp. 41-88
- [694] K. Saito, Duality for regular systems of weights, topological field theory, primitive forms and related topics, M. Kashiwara, K. Saito, A. Matsuo, I. Satake editors, Birkhäuser, 1998 (voir références de Extended affine root system I à V, RIMS Kyoto University)
- [695] K. Saito, Regular system of weights and associated singularities, Advanced Studies in Pure Mathematics 8, Complex analytic singularities, 1986, pp. 479-526
- [696] K. Saito, Extended affine root system V (elliptic eta products and L-functions, Proceedings on Moonshine and related topics, ed. McKay, CRM Proceedings and Lecture Notes, vol.30, 2001
- [697] G. Paun, G. Rozenberg, A. Salomaa, DNA computing: New computing paradigms, Springer Verlag, 1998
- [698] Sangjing Lee, Ki Hyoung Ko, Jung Hee Cheon, Jae Woo Han, Ju-sung Kang, Choonsik Park, New public-key cryptosystem using braid groups, http://knot.kaist.ac.kr/~sjlee/
- [699] P. Sarnak, Class numbers of indefinite binary quadratic forms, J. of Number Theory, vol. 15, 1982, pp. 229-247
- [700] A. L. Schmidt, Minimum of quadratic forms with respect to fuchsian groups (I), J. Reine Angew. Math. 286/287, 1976, pp. 341-348
- [701] K. Schmidt, Dynamical systems of algebraic origin, Birkhäuser, 1995
- [702] M. Schmitter, F. Prêtteux, Morphologie mathématique informatique, Masson, 1994
- [703] P. Schmutz, Systoles of arithmetic surfaces and the Markoff spectrum, Math. Ann. 305, 1996, pp. 191-203
- [704] P. Schmutz-Schaller, Geometry of Riemann surfaces based on closed geodesics, Bull. Amer. Math. Soc. vol 35, n°1, 1998, pp. 193-214
- [705] P. Schmutz-Schaller, A cell decomposition of Teichmüller space based on geodesic length functions, GAFA, Geom. Funct. Anal. vol 11, 2001, pp. 142-174
- [706] X. Buff, J. Fehrenbach, P. Lochak, L. Schneps, P. Vogel, Espaces de modules des courbes, groupes modulaires et théorie des champs, Panorama et synthèses, n°7, SMF, 1999
- [707] M. R. Schroeder, Number theory in science and communication, Springer Verlag, 1986
- [708] L. Schwartz, Généralisation de la notion de fonction, de dérivation, de transformation de Fourier, et applications mathématiques et physiques, Ann. Univ. Grenoble 21, 1945, p. 57-74
- [709] M. Enock, J. M. Schwartz, Kac algebras and duality of locally compact groups, Springer Verlag, 1992
- [710] H. Schwerdtfeger, Geometry of complex numbers, Dover, 1962
- [711] P. E. Gunnels, R. Sczech, Evaluation of Dedekind sums, Eisenstein cocycles, and special values of L-functions, arXiv:math.NT/9909141 v2, 5 oct. 1999
- [712] J. B. Seaborn, Hypergeometric functions and their applications, Texts in applied mathematics n°8, Springer Verlag, 1991
- [713] J. McKay, A. Sebbar, Fuchsian groups, automorphic functions and schwarzians, Math. Ann. 318, 2000, pp. 255-275
- [714] A. Sebbar, Classification of torsion-free genus zero congruence groups, Proc. Amer. Math. Soc. vol. 129 n°9, pp. 2517-2527
- [715] B. Segre, Arithmetic upon an algebraic surface, Bull. Amer. Math. Soc., 1945, pp. 152-161
- [716] B. Segre, The non singular cubic surfaces, Oxford University Press, 1942
- [717] H. Seifert, W. Threlfall, A textbook of topology, Academic Press, 1980

- [718] A. Selberg, Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series, J. Indian Math. Soc. n°20, 1956, pp. 47-87
- [719] R. N. Sen, G. L. Sewell, Fiber budles in quantum physics, J. Math. Phys, vol. 43 n°3, March2002, pp. 1323-1339
- [720] M. Seppälä, T. Sorvali, Geometry of Riemann surfaces and Teichmüller spaces, Mathematics studies 169, North Holland, 1992
- [721] M. Seppälä, Myrberg's numerical uniformization of hyperelliptic curves, to be published in Ann. Acad. Sci. Fenn., http://web.math.fsu.edu/~seppala/ ComputationsOn-Curves/index.html
- [722] C. Series, The geometry of Markoff numbers, The mathematical intelligencer, vol 7, n°3, 1985, pp. 20-29
- [723] J. S. Birman, C. Series, An algorithm for simple curves on surfaces, J. London Math. Soc. (2) 29, 1984, pp. 331-342
- [724] C. Series, A. Haas, The Hurwitz constant and diophantine approximation on Hecke groups, J. London Math. Soc. (2) 34, 1986, pp.219-234
- [725] C. Series, Some geometrical models of chaotic dynamics, Proc. R. Soc. Lond., A413, 1987, pp. 171-182
- [726] D. Mumford, C. Series, D. Wright, Indra's pearls (The vision of Felix Klein), Cambridge University Press, 2002
- [727] J. P. Serre, Homologie singulière des espaces fibrés, applications, Ann. of Maths. II série 54, 1951, pp. 425-505
- [728] J. P. Serre, Arbres, amalgames, SL_2 , Astérisque n°46, SMF, 1982
- [729] J. P. Serre, Cours d'arithmétique, P.U.F., 1970
- [730] J. P. Serre, Cohomolgie galoisienne, Lecture Notes in Mathematics n°5, Springer, 1965
- [731] J. P. Serre, Corps locaux, en particulier Chapitre X, Hermann, 1968
- [732] J. P. Serre, Géométrie algébrique et géométrie analytique, Ann. Inst. Fourier n°6, 1955, pp.1-42
- [733] J. P. Serre, Topics in Galois theory, Research Notes in Mathematics, Jones and Barlett Publishers, 1992
- [734] J. P. Serre, Représentations linéaires des groupes finis, Hermann, 1967
- [735] I. R. Shafarevich, Basic algebraic geomtry (Tome I : Varieties in projective space, Tome II : Schemes and complex manifolds), Springer Verlag, 1977
- [736] C. Shannon, W. Weaver, A mathematical theory of communications, University of Illinois Press, 1949
- [737] H. Atmanspacher, H. Scheingraber editors, Information dynamics, Plenum Press, New York, 1991 (voir en particulier l'article de Manfred Euler pp. 167-183)
- [738] M. Sheingorn, Characterization of simple closed geodesics on Fricke surfaces, Duke Mathematical Journal, vol. 52 n°2, 1985, pp. 535-545
- [739] G. Shimura, Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions, Princeton University Press, 1994
- [740] T. Shioda, On elliptic modular surfaces, J. Math. Soc. Japan 24, 1972, pp. 20-59
- [741] T. Shioda, Characterization of Jacobian varieties in terms of solitons equations, Invent. Math. 83, 1986, pp. 333-382
- [742] C. Consani, J. Scholten, Arithmetic on a quintic threefold, International journal of Mathematics vol. 12 n°8, 2001, pp. 943-972
- [743] P. W. Shor, http://www.research.att.com/~shor, notamment Algorithms for quantum computation: discrete logarithms and factoring, Proceedings 35th annual symposium on foundations of computer science, November 20-22, 1994, pp.124-134
- [744] J. C. Sidler, Géométrie projective, Interéditions, 1993
- [745] L. Siegel, Topics in complex function theory, John Wiley ans sons, 1969

- [746] G. Sierra, C. Gomez, Quantum harmonic oscillator, algebra and invariants, J. Math. Phys. A.22, 1989, p. 873
- [747] J. H. Silverman, The arithmetic of elliptic curves, Springer-Verlag, 1986
- [748] J. H. Silverman, Advanced topics in the arithmetic of elliptic curves, Graduate texts in mathematics n°151, Springer Verlag, 1994
- [749] J. H. Silverman, Integral points on curves and surfaces, Proc. 15th Journées Arithmétiques, 1987, Lecture Notes in Mathematics 1380, Springer Verlag, 1989, pp. 202-241
- [750] M. Hindry, J. H. Silverman, Diophantine geometry, an introduction, Graduate texts in mathematics 201, Springer Verlag, 1991
- [751] J. H. Silverman, Speculations about the topology of rational points: an up-date, Columbia University number theory seminar, New York, 1992, Astérisque n°228, 1995, pp. 165 - 181
- [752] J. H. Silverman, G. Cornell, G. Stevens, Modular forms and Fermat's last theorem, Springer Verlag, 1997
- [753] N. J. A. Sloane, Error correcting codes and invariant theory: new applications of a nineteenth century technique, American Mathematical Monthly 84, 1977, pp. 82-107
- [754] P. Slodowy, Solides platoniciens, singularités de Klein, catastrophes élémentaires et groupes de Lie, Logos et théorie des catastrophes, Colloque de Cerisy, Editions Patiño, 1982
- [755] P. Slodowy, Groups and special singularities, Singularity theory, eds RD. T. Lê, K. Saito, B. Teissier, International center for theoretical physics 19 août-6septembre 1991, World Scientific, 1995, pp. 731-799
- [756] S. Smale, Generalized Poincaré's conjecture in dimension greater than 4, Ann. of Math n°74, 1961, pp. 391-406
- [757] N. P. Smart, The algorithmic resolution of diophantine equations, London Mathematical Society Student Texts 41, 1998
- [758] V. P. Snaith, Topological methods in Galois representation theory, Canadian Mathematical Society Series of Monographs and Advanced Texts, Wiley, 1999
- [759] W. Soergel, Langlands'philosophy and Koszul duality, http://home-mathematik.uni-freiburg.de/soergel/
- [760] N. Sochen, R. Kimmel, R. Malladi, From high energy physics to low level vision, Lawrence Berkeley National Laboratory, report LBNL 39243, University of California, Berkeley, CA 94720, 22 August 1996, pp. 1-39, citeseer.ng.nec.com/ 208527.html
- [761] A. Sossinsky, Noeuds, génèse d'une théorie mathématique, Seuil, 1999
- [762] V. V. Prasolov, A. B. Sossinsky, Knots, Links, Braids and 3-manifolds, An introduction to the new invariants in low-dimensional topology, Translations of mathematical monographs n°154, A.M.S., 1997
- [763] Ch. Soulé, K-theory and the values of the zeta functions, Algebraic K-theory and its applications, Proceedings of the workshop and symposium, H. Bass, A. O. Kuku, C. Pedrini (Eds), World Scientific, 1999, pp. 255-281
- [764] Ch. Soulé, Géométrie d'Arakelov des surfaces arithmétiques, Séminaire Bourbaki n°713, 1988-1989, pp.1-13
- [765]~ E. H. Spanier, Algebraic topology, Springer Verlag, 1966
- [766] J. S. Spielberg, Cuntz-Krieger algebras associated with fuchsian groups Ergod. Th. & Dynam. Sys. 13, 1993, pp. 581-595
- [767] G. Springer, Introduction to Riemann surfaces, Addison Wesley, 1957
- [768] G. Stevens, The Eisenstein measure and real quadratic fields, Compte rendu de la conférence internationale de théorie des nombres (J. M. de Koninck, C. Levêque, éditeurs), Laval, 5-18 juillet 1982, W. de Gruyter, 1989
- [769] J. Stillwell, Geometry of surfaces, Springer Verlag, 1992
- [770] D. Sullivan, Linking the universalities of Milnor-Thurston Feigenbaum and Ahlfors-Bers, Topological methods in modern mathematics, a symposium in honor of John Milnor's sixtieth birthday, Publish or Perish, 1993
- [771] D. W. Sumners, Untangling DNA, Math. Intelligencer 12, $n^{\circ}3$, 1990, pp.71-80

- [772] P. Swinnerton-Dyer, The Brauer group of cubic surfaces, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, vol 1313, 1993, pp. 449-460
- [773] S. Tabachnikov, Billiards, Panoramas et Synthèses 1, S.M.F., 1995
- [774] K. Takeuchi, Arithmetic triangle groups, J. Math. Soc. Japan, vol 29, n°1, 1977, pp. 91-106
- [775] L. A. Takhadjian, P. G. Zograf, The Selberg zeta function and a new Kähler metric on the moduli space of punctured Riemann surfaces, Journal of Geometry and Physics, vol 5, n°3, 1988, reedition in "Geometry and Physics", Essays in honour of I. M. Gelfand, North-Holland, 1991, pp. 551-570
- [776] L. Takhadjian, Topics in quantum geometry of Riemann surfaces : two dimensional quantum gravity, arXiv/hep-th/9409088
- [777] M. E. Taylor, Non commutative harmonic analysis, Mathematical surveys and monographs $n^{\circ}22$, A.M.S. 1986
- [778] A. Terras, Harmonic analysis on symmetric spaces and applications (1), Springer V., 1985
- [779] A. Terras, Fourier analysis on finite groups and applications, London Mathematical Society Student Texts 43, Cambridge University Press, 1999
- [780] H. M. Stark, A. A. Terras, Zeta functions of finite graphs and coverings (part II), Advances in Maths. 154, 2000, pp. 132-195
- [781] A. Terras, Finite quantum chaos, The American Mathematical Monthly, vol.109 n°2, 2002, p. 121-139
- [782] M. A. Tsfasman, S. G. Vladut, Algebraic geometric codes, Kluwer, Amsterdam, 1991
- [783] W. P. Thurston, The geometry and topology of 3-manifolds, University of Princeton, Preprint, 1978
- [784] W. P. Thurston, Three-dimensional geometry and topology, vol. 1, Princeton University Press, 1997
- [785] W. P. Thurston, J. Weeks, Les variétés à trois dimensions, Les mathématiques d'aujourd'hui, Belin Pour la Science, 1986
- [786] M. A. Knus, A. Merkurjev, M. Rost, J. P. Tignol, The book of involutions, A.M.S. Colloquium Publications n° 44, 1998
- [787] T. Klotz Milnor, Efimov's theorem about complete immersed surfaces of negative curvature, Adv. in Math. n°8, 1972, pp. 474-543
- [788] J. Tits, Groupes associés aux algèbres de Kac Moody, Sém. Bourbaki n°700, 1988-1989, pp.1-24
- [789] T. Tom Dieck, Transformation groups, Walter de Gruyter, 1987
- [790] L. Tornheim, Asymmetric minima of quadratic forms and asymmetric diophantine approximation, Duke Math. J. n°22, 18955, pp. 287-294
- [791] E. R. Toubiana, R. Sá Earp, Introduction à la géométrie hyperbolique et aux surfaces de Riemann, Paris, 1997
- [792] M. Toyoizumi, A note on the Dedekind eta function, JPanta Jour. Algebra, Number Theory and Applications 1(2), 2001, pp. 125-132
- [793] A. M. Turing, On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem, Proceedings of the London Mathematical Society ser.2 vol. 2, 1936-1937, pp. 230-265, corrections vol.43, 1937, pp. 544-546 (réédition dans La machine de Turing, Seuil, 1995)
- [794] A. M. Turing, A physical basis of morphogenesis, Phil. Trans. Roy. Soc., B 237, 1952, p. 37
- [795] C. Vafa, Conformal theories and punctured surfaces, Physics Letters B vol199 n°2, 1987, pp. 195-202
- [796] W. Van Assche, Multiple orthogonal polynomials, irrationality and transcendence, Contemporary Mathematics vol 236, 1999, pp. 325-342
- [797] A. Van de Ven, Twenty years of classifying algebraic vector bundles, Journées de géométrie algébrique, Angers 1979, ed. A. Beauville, Alphen an de Rijn, Sijthoff-Noorhooff, 1980
- [798] W. Barth, C. Peters, A. Van de Ven, Compact complex surfaces, Ergebnisse des Mathematik und ihrer Grenzgebiete 3. Folge. Band 4, 1980

- [799] B. Van der Pol, An electromechanical investigation of the Riemann zeta function in the critical strip, Bull. Amer. Math. Soc. 53, 1947,
- [800] A. Varchenko, Multidimensional hypergeometric functions and representation theory of Lie algebras and quantum groups, Advanced Series In Mathematical Physics vol. 21, 1997, World Scientific, 1995
- [801] I. Vardi, Continued fractions and modular forms, IHES Algorithms seminar 3 avril 2000, http://algo.inria.fr/banderier/Seminar/vardi00.html
- [802] I. Vardi, A relation between Dedekind sums and Kloosterman sums, Duke Math. Journal vol. 55 n°1, 1987, pp. 189-197
- [803] P. B. Cohen et autres, Les nombres, problèmes anciens et actuels, Ellipses, 2000
- [804] J. L. Verdier, Groupes quantiques (d'après V. G. Drinfel'd), Séminaire Bourbaki n°685, Astérisque 152-153, 1987, pp. 305-319
- [805] H. Verril, http://hverill.net/pages~helena/fundomain/index2.html
- [806] V. V. Vershinin, Braid groups and loop spaces, Russian Math. Surveys 54:2, 1999, pp. 273-350
- [807] M. F. Vignéras, Arithmétique des algèbres de quaternions, Lecture Notes in Mathematics n°800, Springer Verlag, 1980
- [808] E. B. Vinberg, Hyperbolic reflexion groups, Russian Math. Surveys 40:1, 1985, pp.31-75
- [809] E. B. Vinberg, Discrete groups generated by reflexions in Lobachevskii spaces, Math USSR-Sbornik vol.1 n°3, 1967, pp. 429-444
- [810] E. B. Vinberg, The absence of crystallographic reflexion groups in Lobachevsky spaces of large dimension, Funt. Anal. Appl. 15:2, 1981, pp. 79-80
- [811] E. B. Vinberg, Discret linear groups generated by reflexions , LMath. USSR Izvestija 35, 1971, pp. 1083-1119
- [812] F. Vivaldi, Arithmetic properties of strongly chaotic motions, Phys. D 25, 1987, pp.105-130
- [813] V. Vladimirov, I. Volovich, E. Zelenov, p-adic analysis and mathematical physics, World Scientific, 1994
- [814] M. Culler, K. Vogtmann, Moduli of graphs and automorphisms of free groups, Invent. Math. 84, 1986, pp. 91-119
- [815] J. von Neumann, L'ordinateur et le cerveau, Editions La Découverte, 1992
- [816] J. von Neumann, Les fondements mathématiques de la mécanique quantique, J. Gabay, 1998
- [817] G. V. Voskresenskaya, One special class of modular forms and group representations, Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux 11, 1999, pp. 247-262
- H. Waall. Lamé equations [818]Α. der with finite van monodromy, Dissertation à l'Université d'Utrecht, janv. 2002, http://www.library.uu.nl/digiarchief/dip/diss/2002-0530-113355/inhooud.html
- [819] B. Wajnryb, A simple presentation for the mapping class group of an orientable surface, Israel Journal of Mathematics, vol 45, 1983, pp. 157-174, Erratum: J. S. Birman and B. Wajnryb, Presentations of the mapping class group, Israel Journal of Mathematics, vol 88, 1994, pp. 425-427
- [820] B. Wajnryb, Mapping class group of a surface is generated by two elements, Topology 35, 1996, pp. 377-383
- [821] M. Waldschmidt, Open diophantine problems, Hilbert's Problems Today, 5th -7th, Avril, 2001, http://www.math.jussiseu.fr/~miw/articles/odp.ps
- [822] M. Waldschmidt, P. Moussa, J. M. Luck (ed.), Number theory and physics, Springer proceedings in physics n°47, 1990
- [823] M. Waldschmidt, P. Moussa, J. M. Luck, C. Itzykson (ed.), From number theory to physics, Springer Verlag, 1995
- [824] M. Waldschmidt, Sur la nature arithmétique des valeurs de fonctions modulaires, Séminaire Bourbaki, Exposé n°824, 49ème année, 1996-1997, pp. 1-36

- [825] M. Waldschmidt, Multiple polylogarithms : an introduction, http://www.math.jussieu.fr/ ~miw/ articles/
- [826] J. L. Waldspurger, Engendrement par des séries thêta de certains espaces de formes modulaires, Invent. Math. 50 n°2, 1978/1979, pp. 135-168
- [827] J. L. Walker, Codes and curves, Student Mathematical Library, IAS/Park City Mathematical Subseries vol 7, 2000
- [828] P. L. Walker, Elliptic functions, a constructive approach, John Wiley and sons, 1996
- [829] M. Watkins, Number theory and physics archive, htp://www.maths.ex.ec.uk/~mwatkins/
- [830] N. Weaver, Mathematical quantization, Studies in advanced mathematics, Chapman and Hall, 2001
- [831] Ch. A. Weibel, The development of algebraic K-theory before 1980, Contemp. Math. 243, 1999, http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0343/index.html
- [832] Ch. A. Weibel, History of homological algebra, http://www.math.uiuc.edu/K-theory/ 0245/index.html
- [833] Ch. A. Weibel, The development of algebraic K-theory before 1980, A.M.S. 1999, http://www.math.uiuc.edu/K-theory/
- [834] A. Weil, Sur l'analogie entre les corps de nombres et les corps de fonctions algébriques, 1939, Oeuvres scientifiques, Springer Verlag 1979, pp. 236-240
- [835] A. Weil, Arithmetics on algebraic varieties, Ann. of Math. 53, 1951, pp. 412-44
- [836] André Weil (1906-1998), Numéro spécial de la Gazette des Mathématiciens n°80, 1989
- [837] A. Weil, Courbes algébriques et variétés abéliennes, Hermann, 1971
- [838] A. Weil, Théorèmes fondamentaux de la théorie des fonctions thêta (d'après les mémoires de Poincaré et Frobenius), Séminaire Bourbaki, Exposé n°16, Mai 1949, pp. 1-10
- [839] A. Weil, Elliptic functions according to Eisenstein and Kronecker, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 88, Springer Verlag, 1976
- [840] E. W. Weisstein's world of mathematics, http://mathworld.wolfram.com/
- [841] R. O. Wells, Complex manifolds and mathematical physics, Bull. Amer. Math. Soc. vol.1 n°2, 1979, pp. 296-336
- [842] H. Weyl, Die idee der Riemannschen Fläche, Teubner, 1923
- [843] H. Whitney, Differentiable manifolds, Ann. of Math. n°37, 1936, pp. 645-680
- [844] A. J. Wiles, Modular elliptic curves and Fermat's last theorem, Annals of Maths. n°141, 1995, pp. 433-551
- [845] A. J. Wiles, The Birch and Swinnerton-Dyer conjecture, Clay Mathematics Institute, www.claymath.org (voir aussi l'article dans Mathematics : Frontiers and perspectives, IMU/AMS, 2000)
- [846] W. Willinger, V. Paxson, Where mathematics meets the internet, Notices of the American Mathematical Society, vol. 45, n°8, 1998, pp. 961-970
- [847] E. Witten, Physics and geometry, Proceedings of the international congress of mathematicians, Berkeley, California, 1986, pp. 267-303
- [848] E. Witten, Physical law and the quest for mathematical understanding, Bull. Amer. Math. Soc. vol 40, n°1, 2002, pp. 21-29
- [849] J. A. Wolf, Spaces of constant curvature, Publish or Perish, 1984
- [850] S. Wolpert, On the Kahler form of the moduli space of once punctured tori, Comm. Math. Helvetici 58, 1983, pp. 246-256
- [851] J. Yan, A. Yan, B. Yan, Prime numbers and the amino acid code: analogy in coding properties, J. Theor. Biol. vol. 151 n°3, 1991, pp. 333-341
- [852] S. T. Yau, E. Zaslow, BPS states, string duality, and nodal curves on K3, Nuclear Phys. B 471, 1996, pp. 503-512
- [853] M. Benson, S. T. Yau, Lie algebras and their representations arising from isolated singularities: computer method in calculating the Lie algebras and their cohomology, Advanced Studies in Pure Mathematics 8, Complex analytic singularities, 1986, pp. 3-58

- [854] J. C. Yoccoz, An introduction to small divisors problems, From number theory to physics (M. Waldschmidt, P. Moussa, J. M. Luck, C. Itzykson, ed.), Springer Verlag, 1995
- [855] D. Cerveau, E. Ghys, N. Sibony, J. C. Yoccoz, M. Flexor, Dynamique et géométrie complexes, Panoramas et Synthèses 8, S.M.F., 1999
- [856] H. P. Yockey, Origin of life on earth and Shannon's theory of communication, Computers and chemistry 24, 2000, p. 105-123
- [857] Ph. Biane, J. Pitman, M. Yor, Probability laws related to the Jacobi theta and Rielann zeta functions, and Brownian excrursions, Bull. Amer. Math. Soc. 38, 2001, pp. 435-465, electronically published June 12, 2001
- [858] M. Yoshida, Hypergeometric functions, my love, modular interpretations of configuration spaces, Aspects of Mathematics vol. E.32, Vieweg and sons, 1997
- [859] K. Iwasaki, H. Kimura, S. Shimomura, M. Yoshida, From Gauss to Painlevé (A modern theory of special functions), Aspects of Mathematics E.16, Vieweg Verlag, 1991
- [860] M. Yoshida, Fuchsian differential equations with special emphasis on the Gauss-Schwartz theory, Vieweg Verlag, 1987
- [861] D. Zagier, On the number of Markoff numbers below a given bound, Math. Comp. 39, 1982, pp. 709-723
- [862] D. Zagier, Higher dimensional Dedekind sums, Math. Ann. 202, 1973, pp. 149-172
- [863] D. Zagier, Vassiliev invariants and a strong identity related to the Dedekind eta function, Topology 40, 2001, pp. 945-960
- [864] O. Zariski, Algebraic surfaces (2nd edition), Ergebnisse der mathematic, vol 61, Springer Verlag, 1971
- $[865] \quad \text{G. M. Ziegler, Lectures on polytopes, Graduate texts in math. } n^{\circ}152, \text{Springer Verlag, } 1995$
- [866] H. Zieschang, E. Vogt, H. D. Coldewey, Surfaces and planar discontinuous groups, Lecture Notes in Mathematics n°835, Springer Verlag, 1980
- [867] H. Zieschang, Finite groups of mapping classes of surfaces, Lecture Notes in Mathematics $n^{\circ}875$, Springer Verlag, 1981
- [868] G. Burde, H. Zieschang, Knots, De Gruyter, 1986

Table des matières

 Remerciements Présentation générale 	4 5
	J
Chapitre 1. Généralisation de la théorie de Markoff	13
1. Introduction	13
2. Présentation de la théorie	13
2.1. Notations	13
2.2. Forme de Markoff	15
2.3. Réduction	15
2.4. Calcul des constantes et approximation diophantienne	16
2.5. Extrema positif et négatif	17
2.6. L'équation de Markoff généralisée	18
2.7. Autres démontrations	19
2.8. Complément	20
3. Perspectives	20
Chapitre 2. Résolution complète de nos équations	21
1. Introduction	21
2. Méthode de résolution et conséquences	21
2.1. Invariance par le groupe du triangle	21
2.2. Différentes structures d'arbres sur le groupe du triangle	22
2.3. Le groupe du triangle dans $GL(2,\mathbb{Z})$	23
2.4. Forêt et bouquets de solutions	25
2.5. Hauteur et réduction des triplets de solutions	25
2.6. Solutions fondamentales dans $(\mathbb{N}\setminus\{0\})^3$	25
2.7. Solutions minimales dans $(\mathbb{N}\setminus\{0\})^3$	26
2.8. Les triplets de Cohn et leur utilisation	26
2.9. La construction algorithmique à droite et à gauche	27
2.10. Conséquence pour la résolution de nos équations	28
2.11. Construction des suites de départ X_2 et T	28
2.12. Remarques complémentaires	29
2.13. Un exemple d'application	30
2.14. La condition de divisibilité équivalente et ses conséquences	31
2.15. Le cas des équations où $u = 0$	31
2.16. Application à l'étude du spectre de Markoff	32
3. Perspectives	33
Chapitre 3. Approche algébrique	35
1. Introduction	35
2. Lien de nos équations avec des corps quadratiques réels	35

2.1. Construction de \mathbb{Z} -modules complets	36
2.2. D'autres \mathbb{Z} -modules complets	36
2.3. Une décomposition en produit	37
2.4. Equation d'un Z-module complet quelconque	37
3. Lien de nos équations avec les courbes elliptiques	38
3.1. Un exemple	38
3.2. Cas singuliers	39
3.3. Cas général	39
3.4. Description géométrique de la surface cubique	40
4. Perspectives	41
Chapitre 4. Approche analytique	43
1. Introduction	43
2. Construction de tores percés conformes	43
2.1. Les deux matrices d'un tore percé conforme	44
2.2. Le groupe fuchsien d'un tore percé conforme	45
2.3. Hyperbolicité des deux matrices d'un tore percé	46
2.4. Intervention des commutateurs	46
2.5. Tores percés paraboliques et hyperboliques	47
2.6. Une représentation à trois paramètres	48
2.7. Autre représentation à quatre paramètres	50
2.8. Rôle des transformations anti-conformes	51
3. Signification géométrique de nos équations	52
3.1. Cône attaché à un tore percé	52
3.2. Lien avec nos équations $M^{s_1s_2}(b,\partial K,u)$	53
4. Théorie complète pour les tores percés paraboliques	55
4.1. Représentations à deux paramètres	55
4.2. Des exemples de tores percés paraboliques	56
4.3. Classification des groupes de Fricke par les triplets de traces	58
4.4. Réduction des tores percés paraboliques	58
4.5. Module d'un tore percé conforme parabolique	61
4.6. Apparition des quaternions	62
5. Perspectives	63
Chapitre 5. Généralisation aux surfaces de Riemann	65
1. Introduction	65
2. Rappels succincts sur les surfaces de Riemann	67
2.1. Uniformisation des surfaces de Riemann	67
2.2. Surfaces de Riemann définies par un groupe fuchsien	69
2.3. Autre anti-équivalence de catégories	69
2.4. C^* -algèbres	70
2.5. Prolongement des surfaces et espèces de groupes fuchsiens	71
2.6. Groupes fuchsiens élémentaires	71
2.7. Signature d'un groupe fuchsien	71
2.8. Invariant d'Euler-Poincaré	73
2.9. Géométrie symplectique	73
2.10. Approche topologique du groupe de Poincaré	74
2.11. Approche conforme du groupe de Poincaré	74
2.12. Remontée à un groupe de matrices	75

2.13. Le théorème de Poincaré	76
2.14. Groupes de Coxeter associés	77
2.15. Groupes de triangle hyperboliques	77
2.16. Jacobienne et fonctions thêta	79
2.17. Fonctions automorphes	80
3. La théorie de Teichmüller généralisant celle de Markoff	81
3.1. Représentations du groupe de Poincaré	82
3.2. Equivalence des représentations et réduction	83
3.3. Groupes fuchsiens arithmétiques	84
3.4. Compléments sur les représentations de groupes	84
3.5. La présentation classique de la théorie de Teichmüller	85
3.6. Compactification de l'espace de Teichmüller	87
3.7. Espaces de Stein et domaines de Riemann	88
4. Codage des géodésiques	89
4.1. Décomposition du groupe des classes d'applications	89
4.2. Codage des géodésiques	89
4.3. Dynamique symbolique	91
4.4. Approche ergodique	91
5. Ubiquité de la fonction êta de Dedekind	91
5.1. Les fonctions thêta	91
5.2. Lien avec le codage de l'information	92
5.3. Lien avec l'équation de la chaleur	93
5.4. Les quatre fonctions thêta habituelles	93
5.5. Expressions avec la fonction êta de Dedekind	94
6. Approche hypergéométrique de la théorie de Markoff	95
6.1. Relation avec une fonction elliptique	95
6.2. Sphère à trois piqûres et invariant modulaire	95
6.3. L'étude hypergéométrique des relations de H. Cohn	97
7. Approache par la double uniformisation	99
7.1. Une construction générale	99
7.2. Notions attachées au tore \mathcal{T}	101
7.3. Notions attachées à un tore percé $\mathcal{T}\setminus\{p\}$	108
7.4. Interprétation géométrique de la double uniformisation	109
8. Approche par le chaos quantique	110
8.1. Quelques exemples	110
8.2. L'intégrale de pas de Feynman	111
8.3. Cas de l'oscillateur harmonique quantique	112
8.4. Le chaos quantique et les géodésiques	112
8.5. Application à la théorie de Markoff	113
9. Quelques thèmes de réflexion connexes	114
9.1. Liens avec les fibrés vectoriels et la K-théorie	114
9.2. Lien avec les fonctions zêta	115
9.3. L'automorphie de la fontion êta liée au nombre d'or	115
9.4. Lien avec des espaces topologiques plus généraux	116
10. Une perspective globale en guise de conclusion	117
Bibliographie	121

TABLE DES MATIÈRES

155